MATEMATIK **Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2003–10–25 kl. 14.15–18.15
Tentamen Telefonvakt: Alexander Herbertsson, tel. 0740 459022

Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA 660)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

---

1. (a) Bestäm, på parameterform, skärningslinjen mellan planen $x - y + 2z = -2$ och $2x - y + z = 2$. (3p)

(b) Bestäm ekvationen för det plan som är vinkelrätt mot båda planen i (a) och som innehåller punkten $P_0 = (1, 2, -1)$. (3p)

(c) Bestäm avståndet från punkten $P = (5, 3, 3)$ till planet i (b) ovan. Bestäm dessutom den ortogonala projektionen av $\overrightarrow{P_0P}$ på samma plan. (3p)

2. Lös andragradsekvationen (6p)

$$(1 + 2i)z^2 + (2 - i)z - 5 + 15i = 0.$$

(Bra att veta: $\sqrt{841} = 29$)

3. Låt (8p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -a & 2 \\ a & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm för alla värden på a dimensionen av kolonnrummet för A.

(b) Bestäm nollrummet i fallet $a = 2$. (Lös ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.)

4 Bestäm med hjälp av minsta kvadratmetoden den ”bästa” anpassningen av en rät linje till följande punkter i planet, (1, 1.5), (2, 8) och (3, 5.5). Bestäm också medelfelet. (8p)

5. Låt T och F vara två linjära avbildningar från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ sådana att $T(\mathbf{u})$ är den rätvinkliga projektionen av $\mathbf{u}$ på planet $3x - y + z = 0$ och $F(\mathbf{u})$ den rätvinkliga projektionen av $\mathbf{u}$ på linjen $x = y = -z$. Bestäm standardmatrisen (avbildningsmatrisen) för den sammansatta avbildningen $F \circ T$. (8p)

6. Låt A vara en $m \times n$ matris. Visa att nollrummen för $A^T A$ och A är lika, dvs. visa att, (7p)

$$A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

(7p)

7. (a) Definiera begreppet invers till en matris A.

(b) Visa att om A och B är inverterbara $n \times n$ matriser så är produkten AB också inverterbar.

(c) Visa att om A är inverterbar så är också A^T inverterbar.

8. Visa att om A och B är två $n \times n$ matriser så är (7p)

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Lycka till!
TG