

Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA 660)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

1. (a) Är de tre vektorerna $(1, 2, -1)$, $(-1, 1, 0)$ och $(1, -3, 1)$ linjärt beroende? (3p)
- (b) Vad är vinkeln mellan vektorerna $(2, -1, 1)$ och $(2, 0, 2)$? (3p)
- (c) Lös följande ekvationssystem approximativt med minsta kvadratmetoden (4p)

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

2. (a) Lös ekvationen $z^2 - (1 + i)z + 5i = 0$. (4p)

- (b) Beräkna $\left(\frac{-\sqrt{3} + i}{1 - i}\right)^9$ på formen $a + bi$. (4p)

3. En rät linje går genom punkten $(-1, 3, 4)$ och har riktningsvektorn $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$. Bestäm linjens projektion på planet $3x - y + 2z = -8$. Ange den projicerade linjens ekvation på parameterform. (7p)

4. Lös matrisekvationen $XA = B + 2X$ där (8p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 12 & -2 \\ 6 & 3 & 15 & -4 \end{bmatrix}.$$

5. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ges av (7p)

$$F(1, 1, -1) = (-1, -2, 1), \quad F(1, -1, 1) = (3, 6, -3) \quad \text{och} \quad F(-1, 1, 0) = (7, 0, 3).$$

Bestäm värderummet för F .

Finns det någon vektor (x, y, z) sådan att $F(x, y, z) = (1, 1, 1)$?

6. Låt A vara en kvadratisk matris vars nollrum är $N(A)$ och kolonnrum $V(A)$. (6p)
Visa att

$$V(A) \subseteq N(A) \Leftrightarrow A^2 = 0.$$

7. Formulera och bevisa distributiva lagen för vektorprodukt (inklusive hjälpsatsen). (7p)

8. Definiera begreppen *linjär avbildning* och *standardmatris* till en linjär avbildning. (7p)
Hur bestämmer man standardmatrisen? Bevisa ditt påstående.