MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

Tentamensskrivning i
Linjär algebra och geometri för F1, (TMA 660)
Datum: 2001-10-27, 14.15 - 18.15
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Henrik Seppänen tel. 0740 459022

---

1. a) Bestäm avståndet från punkten $P = (-1, 3, 3)$ till det plan π som innehåller punkterna $P_1 = (1, 0, 1)$, $P_2 = (0, -1, 1)$ och $P_3 = (1, 2, 4)$. (6p)

   b) En ljuskälla är placerad i punkten P. Den genererar en smal ljusstråle som reflekteras i punkten P_1 i det speglande planet π ovan. (4p)
   Bestäm ekvationerna för linjerna som beskriver ljusstrålens bana.
   (Koordinater är angivna i ett ON-system.)

2. Betrakta ekvationssystemet (7p)

$$\begin{cases} x + y + z + 2u = 1 \\ ax + z + u = 2 \\ 2x + 2y + 3z + 5u = 3 \\ y + z + au = b \end{cases}$$

   a) Bestäm determinanten för koefficientmatrisen och avgör för vilka a som ekvationssystemet har en entydig lösning.
   b) Avgör för vilka värden på a och b som systemet har mer än en lösning och bestäm lösningarna i dessa fall

3. En kvadrat med sidan två är placerad i den övre halvan av det komplexa talplanet. Ett hörn ligger i punkten $z_1 = 1 + i$ och ena sidan, med start i z_1, bildar vinkeln $\pi/3$ (radianer) med positiva realaxeln. Bestäm övriga hörnpunkter i kvadraten. Rita figur och ange svaret på formen $a + bi$. (6p)

4. Lös matrisekvationen $\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{C} - 2\boldsymbol{XB}$, där (7p)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Ekvationen $z^4 + 5iz^3 + (-7 + 3i)z^2 - 12z - 4 - 12i = 0$ har en rent komplex dubbelrot. Lös ekvationen. (7p)

6. Man säger att ett tal λ är ett egenvärde till en matris $\boldsymbol{A}$ om det finns en icketrivial lösning till ekvationen $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$. (Man säger då också att lösningen $\boldsymbol{x}$ är en egenvektor). (7p)
   Låt $\boldsymbol{P}$ vara en matris sådan att $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^T$ ($\boldsymbol{P}$ är en ortogonalmatris).
   Visa att om $det\boldsymbol{P} = 1$ och $\boldsymbol{P}$ har ett udda antal rader så är $\lambda = 1$ ett egenvärde till $\boldsymbol{P}$.

7. a) Formulera och bevisa multiplikationssatsen för determinanter (6p)

   b) Visa att om matrisen $\boldsymbol{A}$ är inverterbar så är $det\boldsymbol{A} \neq 0$. (2p)

8. a) Definiera begreppet invers matris och visa att en matris har högst en invers. (2p)

   b) Visa att om en matris har en vänsterinvers så är den inverterbar. (6p)

Lycka till !