TMA 660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri för F1
Datum: 2001-08-22, kl. 14.15 - 18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Per Hörfelt, tel. 0740-459022.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1.(a) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkten $(1,1,1)$ samt skärningslinjen mellan planen $4x - y + 3z - 1 = 0$ och $x + 5y - z + 2 = 0$. (4p)
(b) Bestäm (det kortaste) avståndet mellan de räta linjerna

$$\frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = z \quad \text{och} \quad \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}\ . \qquad \text{(6p)}$$

2. Lös för varje värde på λ ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 & +\lambda x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & +3x_2 & +\lambda x_3 & +2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +\lambda x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & \lambda \end{cases} \qquad \text{(6p)}$$

3. Ekvationen $z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 6z + 15 = 0$ har en rot med imaginärdelen 2. Lös ekvationen. (8p)

4. Finns det ett reellt tal λ sådant att vektorerna

$$(3,1,1,4),\ (1,0,0,2),\ (2,1,1,2),\ (\lambda,3,3,-1)$$

bildar en bas i $\mathbb{R}^4$? (6p)

5. Visa att

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\ .$$

Determinanten är av ordning n. (7p)

6. Givet är tre punkter $z_1,\ z_2,\ z_3$ i det komplexa talplanet. Visa att de ligger i linje om och endast om kvoten $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ är ett reellt tal. (7p)

7.(a) Definiera skalär trippelprodukt. (1p)

(b) Ge en geometrisk tolkning av skalär trippelprodukt och bevisa ditt påstående. (4p)

(c) Ge exempel på en sats ur kursen, i vars bevis man använder den skalära trippelproduktens egenskaper. (1p) Formulera satsen och förklara vad man vinner på att betrakta skalär trippelprodukt. (2p)

8. Visa att en kvadratisk matris är inverterbar om och endast om dess determinant är skild från noll. (8p)