

Linjär Algebra och Geometri, F1 (TMA 660)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget. Skriv högst en uppgift per blad och numrera sidorna med uppgift ett först och så vidare.

1. Bestäm ekvationen (på normalform) för planet som innehåller punkterna (6p)

$$P_1 = (0, 1, 3), P_2 = (-1, 3, 1) \text{ och } P_3 = (2, -1, 3).$$

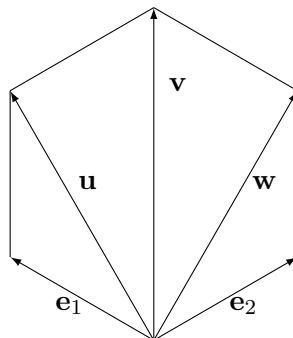
Beräkna sedan det avståndet från punkten $P = (2, 1, -3)$ till detta plan.

2. För deluppgifterna a) - d) nedan skall *endast svar* anges.

- (a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \\ x + 6y + 5z = 7 \end{cases}$$

- (b) I den regelbundna sexhörningen i figuren nedan bildar vektorerna \mathbf{e}_1 och \mathbf{e}_2 (3p) en bas i planet. Ange koordinaterna för vektorerna \mathbf{u} , \mathbf{v} och \mathbf{w} i denna bas.



- (c) Andragradspolynommet (3p)

$$p(z) = z^2 + (1 + 2i)z - 3 + 11i$$

har nollstället $\alpha = 2 - 3i$. Bestäm polynomets andra nollställe.

- (d) Beräkna längden och argumentet för det komplexa talet $\frac{1+i}{-\sqrt{3}+i}$. (3p)

3. Bestäm $V(A)$ (värderummet) och $N(A)$ (nollrummet) för matrisen (7p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Låt $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ vara standardbasen i \mathbb{R}^3 . Bestäm standardmatrisen för den linjära (7p) avbildning $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, sådan att

$$\mathbf{e}_1 = T(\mathbf{e}_2) - T(\mathbf{e}_3), \mathbf{e}_2 = T(\mathbf{e}_1) + T(\mathbf{e}_3), \mathbf{e}_3 = T(\mathbf{e}_1) - T(\mathbf{e}_2).$$

Avgör också om T är volymbevarande.

Var god vänd!

5. För vilka *symmetriska* 3×3 -matriser X gäller att (7p)

$$AX = BX$$

om

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 11 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} ?$$

6. Visa att (7p)

$$-\sqrt{n} \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \sqrt{n}$$

om $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$.

För vilka x_1, x_2, \dots, x_n gäller likhet i den högra olikheten?

Ledning: För vektorer i \mathbb{R}^n gäller Cauchy-Schwarz olikhet: $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$

7. Låt \mathbf{u} och \mathbf{v} vara två vektorer i rummet. (7p)

- Beskriv i en figur projektionen av \mathbf{u} på \mathbf{v} och ange en formel för denna.
- I en högerorienterad ON-bas för rummet så gäller att $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$.
 - Skriv upp en formel (m.h.a. de givna koordinaterna) för skalärprodukten $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
 - För beräkning av kryssprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ finns en något mer komplicerad formel,

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2y_3 - x_3y_2, \dots, \dots)$$

Härled den fullständiga formeln utgående från räknelagarna för vektorprodukt.

8. (a) Beskriv hur determinanten för en kvadratisk matris A definieras om (7p)
- A är en 2×2 -matris,
 - A är en 3×3 -matris,
 - A är en $n \times n$ -matris.
- (b) Visa att en kvadratisk matris A är inverterbar om och endast om $\det A \neq 0$.

Lycka till!
TG