TMA 660
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Linjär algebra och geometri för F1
Datum: 2000-10-21, kl. 14.15 - 18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Erik Svensson, tel. 0740-459022.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1.(a) Bestäm avståndet från punkten $P\,(-1,5)$ till den räta linjen $l:\ 4x+3y-5=0$. (4p)
(b) Finn det plan som är ortogonalt mot planet med ekvation $2x-3y+z-4=0$ och som skär det givna planet i en linje, som ligger i yz-planet. (6p)

2. Lös för varje värde på λ och μ ekvationssystemet

$$\begin{cases} 5x_1 & -8x_2 & +12x_3 & +6x_4 & = & 4 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & 1 \\ 29x_1 & -50x_2 & +75x_3 & +43x_4 & = & \lambda+26 \\ 9x_1 & -12x_2 & +(21-\mu)x_3 & +6x_4 & = & 6 \\ 32x_1 & -54x_2 & +81x_3 & +45x_4 & = & 27 \end{cases} . \qquad (8p)$$

3. Ekvationen $2z^3-3iz+i-1=0$ har en dubbelrot. Lös ekvationen. (7p)

4. Givet är tre punkter $P_1\,(x_1,y_1,z_1)$, $P_2\,(x_2,y_2,z_2)$, $P_3\,(x_3,y_3,z_3)$, som inte ligger i linje (d.v.s. det finns ingen linje som går genom alla tre punkterna). Visa att

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

är en ekvation för det plan som bestäms av P_1, P_2, P_3. (7p)

5. Betrakta $n \times n$ matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att matrisen är inverterbar. (1p)
(b) Invertera matrisen. (5p)

6. Visa att en triangels tyngdpunkt är den punkt i triangelns inre, för vilken summan av kvadraterna på avstånden till triangelns hörn är minimal. (7p)

7. Förklara hur man inverterar matriser med hjälp av Jacobis metod. Motivera att den matris man får verkligen är inversen till den givna matrisen. Ge ett exempel som visar vad som händer om man försöker invertera en matris som inte är inverterbar. (7p)

8. Formulera och bevisa Cramers regel. (8p för godtyckligt n; 5p för $n = 3$)