**Tentamensskrivning i Algebra och serier del A för F1/Kf1**
Datum: 1993-09-09, kl. 14.15-18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt:
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==========================================

**1.** Bestäm avståndet från punkten $P(7;9;7)$ till den räta linjen

$$g : \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}.$$

Bestäm ekvationen för planet genom $P$ och $g$. (6p)

**2.** Lös för varje värde på parametern $\lambda$ ekvationssystemet

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 3 - x_2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 4 - x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases} .$$ (6p)

**3.** Ekvationen

$$z^5 + 7z^4 + 13z^3 + 51z^2 + 36z - 108 = 0$$

har en rent imaginär rot. Lös ekvationen. (7p)

**4.** Invertera $n \times n$ matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ (7p)

**5.** Låt $A$ vara en kvadratisk matris.
**a)** Om matrisen $E - A$ är inverterbar, visa att

$$\sum_{m=0}^{n} A^m = (E-A)^{-1}(E - A^{n+1}) \quad \text{för alla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

**b)** Om $A^k = 0$ för något $k \in \mathbb{N}$, lös ekvationen

$$A + X = AX.$$ (6p)

**6.** Visa att polynomet

$$P(z) = (\cos\alpha - z^2 \sin\alpha)^n - \cos n\alpha + z^2 \sin n\alpha$$

är jämnt delbart med $z^4 + 1$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (6p)

**7.** Visa att en kvadratisk matris är inverterbar om och endast om dess determinant är skild från noll. Visa också att det inte kan finnas mer än en invers till varje matris. (6p)

**8.** Låt $P(x) = 0$ vara en algebraisk ekvation med hela koefficienter. Vad kan du säga om de rationella rötterna till ekvationen (om det finns några)? Bevisa påståendet. (6p)