

1. (a) Din granne gör ett examensarbete om kulturarv från en försvunnen civilization på en avlägsen ö i Stilla Havet. En av deras konstruktioner var fem kolonner byggda av svarta och vita stenblock som är staplade på varann. Det sista forskningslaget som var på ön har mätt höjderna på kolonnerna och observerat att stenblock av samma färg har samma höjd. Efter det har en tsunamivåg förstört hela ön. Din granne vill veta höjden av varje typ av stenblock, men inga tal som han har provat fungerar, förmodligen för att mätningarna inte var tillräckligt noggranna. Professorn som grannen arbetar med har hört att det finns en metod, som heter minsta kvadratmetoden, som hjälper till att hitta tal som passar mätningarna bäst. Hjälp din granne hitta höjderna på stenblocken med hjälp av minsta kvadratmetoden om följande är känt: En kolonn av 3 svarta och 3 vita block har höjden 25m; en kolonn av 2 svarta och 4 vita block har höjden 23 m; en kolonn av 4 svarta och 2 vita block har höjden 23m; en kolonn av 1 svart och 5 vita block har höjden 27 m; en kolonn av 5 svarta och 1 vitt block har höjden 22 m.

- (b) Om man provar olika tal så ser man att hade talen varit rätta hade de fem mätningar fel som vi betecknar respektive $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5$. I vilken mening är felen som man får med minsta kvadratmetoden minst (välj av följande fem alternativ den som är rätt):

Minsta kvadratmetoden minimerar:

- i. $\sqrt{\epsilon_1^2} + \sqrt{\epsilon_2^2} + \sqrt{\epsilon_3^2} + \sqrt{\epsilon_4^2} + \sqrt{\epsilon_5^2}$
- ii. $\sqrt{\epsilon_1^2 \cdot \epsilon_2^2 \cdot \epsilon_3^2 \cdot \epsilon_4^2 \cdot \epsilon_5^2}$
- iii. $\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2 + \epsilon_5^2}$
- iv. $\max(\epsilon_1^2, \epsilon_2^2, \epsilon_3^2, \epsilon_4^2, \epsilon_5^2)$
- v. $\min(\epsilon_1^2, \epsilon_2^2, \epsilon_3^2, \epsilon_4^2, \epsilon_5^2)$

2. (a) Hitta med hjälp av minsta kvadratmetoden bästa approximativ lösning till systemet:

$$\begin{cases} x - y &= 10 \\ x + y + 3z &= 11 \\ x - y + 2z &= 10 \\ x + 2z &= 8 \\ x + y + 3z &= 11 \end{cases}$$

- (b) Ändras lösningen om man tar bort 2:a eller 5'te ekvation (som är identiska)? Varför?

3. (a) Man har ett antal av metaliska kuber som bär elektrisk laddning. Vi vet att kuber av samma färg har samma laddning. Fyra labassistenter gör var sin mätning av de sammanlagda laddningar hos tre kuber, se tabellen nedan. Bestäm, med hjälp av minstakvadrat metoden, laddning på de olika kuberna.

Labassistent	kombination av kuber	mättning
Ada	1 röd, 1, blå, 1 gul	-3
Berta	1 röd, 2 blå	0
Carl	1 blå, 2 gula	2
David	2 röda, 1 blå	-2

- (b) Vad och på vilket sätt minimerar minstakvadratmetoden?