Om bevis

Författat av Maria Roginskaya

> *En matematiker, en fysiker och en biolog åker tåg i fjärran land. Vid sidan av spåret ser de ett svart får. Biologen säger: ”Titta, fåren här är svarta!”*
> *Fysikern rättar honom: ”Vi kan bara säga att vissa får här är svarta.”*
> *Matematikern säger: ”Ni har båda fel. Det enda vi kan säga är att här finns minst ett får som är svart på minst en sida.”*

Inledning

Alla som sysslar med modern matematik måste veta vad ett bevis är. Samtidigt är det lite svårt för en nybörjare att lista ut vad som menas med ”bevis”, och det finns många felaktiga uppfattningar och missförstånd kring begreppet.

I dagens matematik finns det en allmänt etablerad definition av bevis. Men samtidigt är det så att man i praktiken faktiskt nästan aldrig presenterar ett fullständigt bevis i definitionens mening, utan istället gör man en skiss från vilken ett bevis kan återskapas av en matematiskt skicklig person[1]. Denna text riktar sig till nybörjarstudenter inom matematik och har som syfte att presentera dagens syn på bevis och deras plats i matematiken.

Jag börjar med en kortare historisk överblick som sträcker sig fram till början av 1900-talet, då dagens bevisdefinition etablerades. Sedan försöker jag beskriva och illustrera dagens uppfattning om vad ett rigoröst bevis är. Jag kommer dock inte ge någon fullständig definition av *bevis*, eftersom en sådan är komplex och det krävs matematisk vana för att förstå den.

Historisk överblick över bevisbegreppet i västerländsk matematik

I västerländsk civilisation hittar man exempel på bevis redan hos greken Thales (624–546 f.Kr.), men den första presentationen av ett system som liknar dagens bevis är i Euklides *Elementa* (ca 300 f.Kr.). Där härleds genom logiskt resonemang många påståenden från några få ”självklara” *axiom*. Det är intressant att man redan på den tiden försökte granska och ifrågasätta resonemangens kvalitet. Zenon från Elea (ca 490–430 f.Kr.) formulerade några paradoxer som exempel på dåliga resonemang. En av de mer kända är den om den snabbfotade Akilles och sköldpaddan.

> *Tänk dig en löpartävling mellan Akilles och en sköldpadda. Om sköldpaddan får ett försprång på 100 meter, kan Akilles aldrig komma ikapp den. För först måste han nå punkten där sköldpaddan startade tävlingen. Men medan han gör det hinner sköldpaddan förflytta sig till en ny punkt en liten sträcka framåt, och medan Akilles springer till denna, hinner sköldpaddan en liten bit till. Och så fortsätter det.*

[1] Det händer också ofta att läromedelsförfattare bara presenterar en del av ett fullständigt bevis, i syfte att förenkla och undvika krångliga resonemang. Det kan göra boken mer lättläst, men det gör det ännu svårare att lista ut vad ett riktigt bevis är.

Dessa skenbara paradoxer kan man dock bena ut med hjälp av envariabelanalys.

Under medeltiden delades klassisk matematik upp i två inriktningar: en mer abstrakt och en mer konkret. Filosoferna sysslade med logiska resonemang, ofta i relation till oändlighet, men gjorde inga konkreta beräkningar. Samtidigt pågick studier av konkreta tal och geometriska figurer i samband med diverse yrkesutövningar. Uppdelningen gjorde att den första grenen i början av 1000-talet degenererat till översättning och ordagrann tillämpning av resonemangen i klassiska texter, medan den andra grenen praktiskt taget reducerades till ett stort antal ostrukturerade listor av räknealgoritmer, som så småningom glömdes.

Medeltidens attityd till bevis speglas i en anekdot om den skånske astronomen och matematikern Tycho Brahe (1546–1601). Han och en annan matematiker började gräla om riktigheten i en beräkning, och grälet urartade i en duell[2] där Tycho Brahe fick näsan avskuren. Det kan lätt sägas att man då la stor vikt vid vem personen bakom resonemangen var och kritik av resonemangen uppfattades då som kritik av personen, något som inte alls är fallet i dagens matematik[3].

Från mitten av 1500-talet till slutet på 1600-talet etablerades naturfilosofin, som införde tal (och beräkningar) i abstrakta resonemang: Descartes införde koordinatsystemet, Leibniz och Newton utvecklade infinitesimalkalkylen. Eftersom beräkningar som innehåller oändligheter inte kan kontrolleras med vardagsintuition blev kvalitet på resonemangen viktigare.

På 1700-talet upptäckte man några paradoxer av följande slag[4]:
Betrakta serien 1-1+1-1+1-1+… :Om summan av serien är a, då ser vi att a=1-a, vilket ger a=½. Men om vi byter plats på första och andra termen, tredje och fjärde, etc. så ser vi att a=-a. Alltså måste gälla att a=0. Tillsammans ger dessa likheter att ½=0.

Detta ledde till att matematiker blev mera försiktiga. I början på 1800-talet införde Cauchy, Bolzano och Weierstrass det nuvarande epsilon-delta-språket som man läser i envariabelanalys. Detta satte en nivå på argumentationen och gav medel för att uppnå stringens. De flesta matematiska verk som skrivits sedan mitten på 1800-talet uppfyller dagens krav på rigorositet.

I mitten på 1800-talet började man fråga sig hur man på ett mera rigoröst sätt kunde avgöra om ett resonemang är tillräckligt rigoröst. Boole påbörjade systematisk forskning inom logik, och denna följdes upp av andra matematiker, vilket gjorde att man på 1930-talet kunde formulera definitionen av logiskt bevis, eller mera exakt: logisk teori. Den definition av bevis som man hittar t.ex. i första avsnittet av *Mängdläran* skriven av Bourbaki[5] är idag den allmänt etablerade.

Tyvärr kan vi inte avsluta beskrivningen där. Trots att definitionen är ganska klar och omfattande, går den inte att använda i praktiken. Till och med enkla bevis skrivna på den form som definitionen kräver skulle uppta många sidor och bli oläsbara. Därför presenterar man i praktiken inte hela bevis, utan lösare resonemang som kan kompletteras för att passa definitionen.

[2] Den exakta anledningen till duellen är okänd.
[3] Obs! Att förhålla sig kritiskt till ett presenterat bevis oberoende av vem som har presenterat det och var är en av de grundläggande principerna i dagens Matematik. Ifrågasättande av resonemang är alltså tecken på intresse och på inget sätt personligt angrepp
[4] Detta är ett påhittat exempel, som dock har historisk anknytning.
[5] En kollektiv pseudonym på en grupp franska matematiker i början på 1900-talet.

När internet kom initierades några projekt som gick ut på att skriva om matematik med den rigorositet som definitionen av logisk teori kräver – ett slags försök att bekräfta matematikens legitimitet. Men så vitt jag vet har inget projekt ens kommit i närheten av att slutföras.

Att genomföra rigorösa bevis av olika påståenden är ett huvuduppdrag för dagens matematiker, så bevisföring har en central roll i matematisk utbildning. Teoretiska fysiker har ett annat uttryckt mål, men det faktum att bevis i praktiken är ett vattentätt sätt att föra resonemang, gör att bevis som används i teoretisk fysik de facto i stort sätt har hög nivå av rigorositet.

Bevis, påstående och definition

Ett bevis är en kedja av påståenden. Kedjan måste uppfylla några krav på samband, vilket jag beskriver senare. Påståenden som bildar bevis får inte vara vilka meningar som helst, utan måste vara *matematiska påståenden.*

Matematiska påståenden är alltid utsagor i påståendeform. Uppmaningssatser som *"Hej, tomtegubbar, slå i glasen!"* och *"Låt oss lustiga vara!"* är inte matematiska påståenden, medan *"En liten tid vi (har att) leva här"* är ett matematiskt påstående, under förutsättning att vi definierar vad vi menar med "liten tid", "vi" och "här" och preciserar förhållandet "har att leva".

Det är värt att kommentera att många bevis presenterade i litteraturen börjar med *"Låt ..."* eller *"Antag att..."*. Detta är stilistiska knep som syftar på att uttrycka matematisk mening med mänskligt språk. I exemplet *"Låt oss beteckna vektorn (1,0) med e_1..."* betyder detta helt enkelt att var gång man i texten skriver e_1 menar man (1,0). Och *"Antag att v är en lösning till Ax=b..."* indikerar att beviset är uppbyggt efter den hjälpantagande bevismetoden som jag beskriver nedan.

Matematiska påståenden är allmänna, dvs. deras mening beror inte på rum och tid. De kan dock beskriva rum eller tid. Till exempel är påståendet *"Chalmers grundades 1829 i Göteborg"* ett sådant, för det betyder samma sak när och var man än säger det. Men ett påstående som "*Igår satt vi här och räknade*" kan inte användas, om vi inte vet vid vilken tid och plats det uttalades.

Matematiska påståenden handlar vanligen om relationen mellan vilka egenskaper som objekt har eller inte har. Egenskaperna ska vara tydligt definierade, dvs. man ska kunna säga bestämt om egenskapen finns eller ej. Om vi tänker på egenskapen "röd", så kan olika människor ha olika åsikter om huruvida något är rött eller inte. Ett matematiskt påstående måste vara sant eller falskt; det får inte vara "litegrann" eller "delvis" eller "i stort sett".

Det är svårt att formulera matematiskt rigorösa definitioner med vanligt språk. Den grekiska filosofen Platon (ca 400 f.Kr.) försökte definiera människa som en "tvåbent varelse utan fjädrar", men fick genast backa då någon visade honom en plockad tupp. Aristoteles kom då med förslaget att vissa elementära begrepp får vara odefinierbara, och att man ska försöka definiera resten av tingen genom de elementära. Men till och med enkla objekt i en reell värld visar sig vara för komplicerade för att kunna definieras.

Odefinierbara begrepp som ni möter under första året av utbildningen är t.ex. mängd, tal, funktion[6] och summa-operation. Trots att vi inte definierar dessa begrepp, postulerar vi deras egenskaper. Vi

[6] Funktion går egentligen att definiera i modern matematik, men det lär ni först senare i utbildningen.

säger t.ex. att ett tal kan vara exakt ett av positivt, negativt eller noll, och att summan av två positiva tal är ett positivt tal.

Det är viktigt att förstå att matematiken inte behandlar en fysisk värld utan idealiserade abstraktioner som går att behandla rigoröst. Andra vetenskaper, som natur- och samhällsvetenskap, kan sedan använda dessa idealiseringar som modeller i sina studier. Men bara för att modellen i sig är rigorös är det inte säkert att den är en bra approximering av just det fenomen som natur- eller samhällsvetaren vill undersöka. Det är dock inte matematikens uppgift att välja rätt modell – matematikern tillhandahåller enbart en logisk verktygslåda, och det är upp till de tillämpande vetenskaperna att välja de verktyg som är adekvata för att lösa den aktuella uppgiften.

Bevis och logisk härledning

På samma sätt som det inte går att definiera någonting om man inte har elementära begrepp att utgå ifrån, går det inte heller att bevisa något om man inte accepterar vissa grundpåståenden. Dessa grundpåståenden kallas sedan Euklides tid för *axiom* och är helt enkelt enkla påstående som man godtar som sanna. Att summan av två positiva tal är positiv är ett exempel på axiom[7].

Det är egentligen inte alls klart vilka påståenden som är sanna[8] och vilka bland de sanna som ska göras till axiom. Därför brukar vi prata om olika *matematiska teorier*, och dessa består av *satser,* alltså påståenden som är *sanna inom teorin*. En sats är ett påstående som går att härleda logiskt (bevisa) från axiom och redan bevisade satser[9]. Huruvida ett påstående är sant beror alltså på vilken teori den utgår ifrån, dvs. från vilka axiom den är uppbyggd.

Följande logiska regler får användas för att bygga en teori och därmed bevis. Observera att listan inte är fullständig.

- Om A är sant och A => B är sant, då är B sant (detta kallas för *syllogism*[10]*).*
  Exempel: Antag att ”Ada deltar i nollning” är sant och ”Om man deltar i nollning, så är man student” är sant. Då är ”Ada är student” sant. Obs! Man ska inte tro att implikationen gäller åt andra hållet. Bara för att ”Brigitta är student” är sant, betyder det inte nödvändigtvis att ”Brigitta deltar i nollning” är sant.

- Om A => B är sant och B => C är sant, då är A => C sant.
  Exempel: Om ”Om man studerar flitigt, så kan man mycket om kursen” är sant och ”Kan man mycket om kursen, så klarar man tentan” är sant, då är ”Om man studerar flitigt, så klarar man tentan” sant.

- Om A => B är sant, då är (inte B) => (inte A) sant.
  Exempel: Om ”Om man är mycket i solsken, så blir man solbränd” är sant, så är ”Om man inte är solbränd, så är man inte mycket i solsken” sant.

- Om A är ett påstående, då är ”A eller (inte A)” sant.
  Exempel: ”Åldern av en student är under 21 eller minst 21” är sant.

[7] Liksom alla egenskaper av odefinierade objekt.
[8] Om påståenden är sanna i absolut mening eller bara i vår världsbild är en fråga som hör till filosofi och livsåskådning. Vi tar inte upp det här, eftersom det inte påverkar hur man gör logiska härledningar.
[9] Ett axiom är också en sats, på samma sätt som en kvadrat också är en rektangel.
[10] ”A=>B” utläses ”A medför B” och pilen ”=>” kallas *implikationspil*.

- Om A => C är sant och B => C är sant, då är (A eller B)=> C sant.
  Detta är grunden till fallstudier: Om vi vet att alla möjligheter går att dela upp på olika fall, d.v.s. att ”A_1 eller A_2 eller ... A_n” är sant, och ”A_1=>B”, ”A_2=>B”,..., ”A_k=>B” alla är sanna, så är B sant.
  Exempel: ”En student under 21 är en människa” och ”En student som är minst 21 är en människa” medför ”En student är en människa”. Obs! Man ska alltid vara säker på att kontrollera alla fall. Om ”En student som är minst 21 får köpa sprit” är sant i exemplet ovan medför detta inte att ”En student får köpa sprit” är sant.

Utöver de logiska reglerna finns två bevismetoder:

- Hjälpantagande metod (deduktion[11]), går ut på att vi lägger ett påstående A till vår uppsättning av axiom (dvs. ”Antag A...”). Om vi med den utökade teorin lyckas visa att påståendet B är sant, då är påståendet ”A => B” sant (i ursprungliga teorin). Obs! Det spelar ingen roll om påståendet A är sant eller inte. Det som ”A => B” säger är att påståendet B är sant varje gång som påståendet A är sant. Så om B är sant, så är ”A => B” sant för alla påståenden A, sanna som falska.

- Motsägelsemetod (ad absurdum), går ut på att vi lägger påståendet ”inte A” till vår uppsättning av axiom (dvs. ”Antag att A inte är sant...”). Om vi så småningom lyckas visa att det finns ett påstående B, sådant att både B och ”inte B” är sanna, så är påståendet A sant (i den ursprungliga teorin). Med denna metod blir det alltså en *motsägelse* att både B och ”inte B” är sanna. Obs! Påståendet B behöver inte sammanfalla (eller vara ekvivalent) med A. Om teorin är självmotsägande från början (dvs. innehåller B och ”inte B” samtidigt), så är alla påståenden sanna i den.[12]

De flesta matematiker godtar samma uppsättning av axiom och arbetar därmed med samma teori. Därför är det möjligt för oss alla att i våra bevis använda satser som någon annan har bevisat. Ändå åligger det var och en att kontrollera att alla satser som man använder är rigoröst bevisade. Lyckligtvis är det mycket lättare att kontrollera bevis än att skapa dem. Obs! Ett vanligt studentfel är att man glömmer kontrollera att alla villkoren i satsen är uppfyllda, innan man använder den.

Kvantifierare

Matematiska påståenden är ofta av typen ”För alla x gäller A” eller ”Det finns x sådant att B”. Därför har man infört två tecken som kallas kvantifierare: ∀ som betyder ”för alla” och ∃ som betyder ”det finns”. Att hantera påståenden med kvantifierare kan ibland vara lite kontraintuitivt. Notera därför att motsatsen av ”∀x: A” är ”∃x: (inte A)”. Och tvärtom: motsatsen till ”∃x: A” är ”∀x: (inte A)”.

Om t.ex. ”Alla bilarna på parkeringen är av märket Volvo” inte är sann, så är ”Det finns en bil på parkeringen som inte är en Volvo” sann. Obs! ”Det finns en ...” betyder ”Det finns minst en ...” (om man vill säga att ”Det finns exakt en ...” så säger man så, eller ”Det finns en unik ...”).

[11] Från latinska ”de ducere”.
[12] Det är därför man är så rädd för att välja axiom som kan vara motstridiga.

Det blir särskilt krångligt om vi gör utsagor om en tom mängd. Om det inte finns några bilar alls på parkeringen, så är ”Alla bilar på parkeringen är Volvo” sann, medan ”Det finns en bil på parkeringen som är Volvo” är osann (alltså ”För alla ...” medför inte ”Det finns ...”).

Exempel

Jag visar nedan tre olika bevis, som vart och ett är giltigt, av följande påstående:

Sats: För alla tal $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ gäller att om $\mathbf{x+y}=1$ så är $\mathbf{x^2+y^2 \geq ½}$.

Bevis 1

Om $x<0$, så är $y>1$, vilket ger $x^2+y^2>y^2>1\geq ½$.

Om $x>1$, så är $x^2+y^2\geq x^2>1\geq ½$.

Om $0\leq x\leq 1$, ser vi att $y=1-x$, vilket ger $x^2+y^2=x^2+(1-x)^2=1-2x+2x^2$. Eftersom $0\leq x\leq 1$, säger satsen om maximi- och minimivärdet att en funktion som är kontinuerlig i ett slutet och begränsat intervall och är deriverbar i det inre del av intervallet når sitt minimivärde där derivatan är noll eller i ändpunkterna av intervallet. Funktionen $1-2x+2x^2$ är deriverbar och kontinuerlig för alla tal, så den är deriverbar i (0,1) och kontinuerlig i [0,1].

- Ändpunkterna: Värdet av $1-2x+2x^2$ i 0 är 1 (≥½) och i 1 är värdet 1 (≥½).
- Derivatans nollpunkt: Derivatan är $(1-2x+2x^2)'=-2+4x$. Om $-2+4x=0$, så är $x=½$, och $1-2\cdot ½+2(½)^2=½$.

Alltså, $x^2+y^2\geq ½$ för $0\leq x\leq 1$.

Genom att betrakta tre fall, $x<0$, $x>1$, och $0\leq x\leq 1$ har vi betraktat alla möjliga fall, alltså $x^2+y^2\geq ½$.■

Bevis 2

$x^2+y^2=½((x+y)^2+(x-y)^2)\geq ½(x+y)^2=½\cdot 1^2=½$ ■

Bevis 3

Man kan tänka på x och y som koordinaterna av en punkt i koordinatsystemet.

Villkoret $x+y=1$ betyder att punkten ligger på en rät linje. Linjen går genom punkten (1,0), eftersom $1+0=1$, och genom (0,1), eftersom $0+1=1$.

x^2+y^2 är kvadraten av avståndet från origo till (x,y). Vi vet att minsta avståndet till punkterna på en linje uppnås om vi går vinkelrätt mot linjen. Om vi betraktar triangeln [(0,0),(1,0),(0,1)], så är kortaste avståndet lika med längden av höjden från (0,0).

Höjden av en triangel gånger basen är dubbelt så stor som triangelns area. Arean av triangeln [(0,0),(1,0),(0,1)] är ½, och längden av basen [(1,0),(0,1)] är $\sqrt{2}$, alltså är höjdens längd $1/\sqrt{2}$. Så kvadraten på det minsta avståndet är ½. ■

Analys av exemplen

Man kan observera att i alla bevis används välkända satser, utan att man explicit formulerar dem, vilket är ett godtagbart slarv. Vi använder till exempel att kvadraten av ett godtyckligt tal är positiv. Man ska dock vara försiktig så att man inte glömmer att kontrollera tillämpbarhet också för sådana onämnda satser.

Ofta hänvisar man till mer komplicerade men välkända satser som man använder, och i mera formella sammanhang ska man ha en referens till var man kan hitta ett bevis för satsen. Det är det som görs i Bevis 1 när vi hänvisar till satsen om maximi- och minimivärdet, även om det där görs lite otydligt.

Bevis 1 går ut på att betrakta tre olika fall, eftersom vi måste ha begränsade intervall för att kunna tillämpa maximi-minimi-satsen. I en mycket slarvig presentation kan man säga att de två första fallen är uppenbara, men man måste alltid nämna dem för att undvika logiska fel.

Ur estetisk synvinkel är Bevis 1 mindre vackert än de andra två, då vi använder en del kalkyler som hindrar vår intuitiva uppfattning om vad som händer – man kallar ibland detta för proof by brutal force. Bevis 3 är vackert, men baserar sig på så många icke-självklara geometriska påståenden att man kan bli osäker på om man verkligen inte missat något. Bevis 2 är vackert och lätt att kontrollera, men är baserat på den specifika problemformeln $x+y=1$. Om vi byter ut $x+y=1$ mot $x+2y=1$ fungerar inte Bevis 2 längre, medan de andra två bevisen lätt kan anpassas. Så är det ofta: det finns flera olika bevis med olika för- och nackdelar, och vilket bevis man väljer att presentera är en smaksak.

Variationer i utövning

I dagens matematik är krav på logisk bevisföring obligatoriskt. Alla påståenden kan klassas som antingen (1) *bevisade* eller *sanna* om det finns bevis, (2) *motbevisade* eller *falska* om det finns bevis för motsatsen, och (3) *oberoende*, dvs. omöjliga att bevisa eller motbevisa (en sats av Gödel säger t.ex. att för varje teori finns ett påstående som varken går att visa eller motbevisa). För majoriteten av matematiska påståenden gäller dock att vi ännu inte vet vilken klass de tillhör.

Men indelningen i bevisade/motbevisade/oberoende beror på vilken uppsättning av axiom man använder, och det är upp till varje enskild matematiker att ta ställning till. De flesta matematiker arbetar med standarduppsättningen av axiom, men en del matematiker godtar inte det så kallade *urvalsaxiomet*[13]. Det innebär att deras bevis är giltiga i standarduppsättningen, men en del bevis från standarduppsättningen kan de inte använda. Det finns också en del matematiker som godtar axiom som inte ingår i standarduppsättningen, t.ex. kontinuum-hypotesen som är oberoende i standardaxiomuppsättningen. Om man gör sådant måste man påpeka det vid presentationen av sina resultat, så att andra vet hur de kan använda slutsatserna med den hjälpantagande bevismetoden. För vår kurs spelar det ingen roll, eftersom vi inte använder några kontroversiella axiom.

Ett större problem är att terminologi och beteckningar kan skilja sig åt mellan olika böcker. Till exempel kan derivata betecknas på flera olika sätt: *f'(x), dy/dx*, etc.; och termen *distribution* betyder en helt annan sak inom analys än inom sannolikhetslära. Därför måste man alltid vara uppmärksam och kontrollera att man korrekt förstått betydelsen i varje enskilt fall.

[13] Urvalsaxiomet är viktigt då man arbetar med oändliga mängder, t.ex. i avancerad analys.