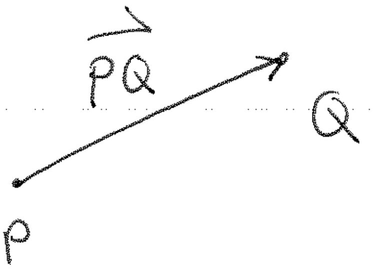
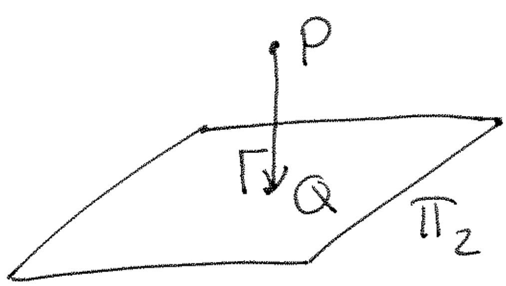
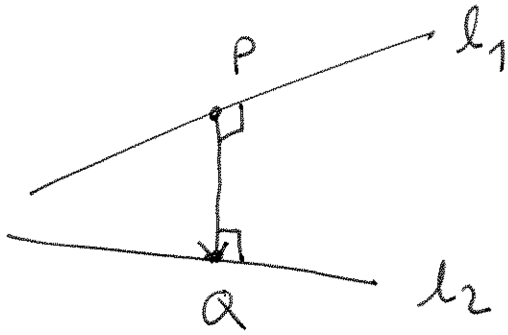
Avstånd

- **Avståndet** mellan **punkterna** P & Q definieras som $|\overrightarrow{PQ}|$.



- **Avståndet** mellan **punkten P / linjen l_1 / planet Π_1** och **punkten Q / linjen l_2 / planet Π_2** definieras som det minsta avståndet mellan P / $P \in l_1$ / $P \in \Pi_1$ och Q / $Q \in l_2$ / $Q \in \Pi_2$.





Mer allmänt:

- Avståndet i $\mathbb{R}^n$ mellan det k_1-dimensionella planet V_1 och det k_2-dimensionella planet V_2 definieras som det minsta avståndet mellan $P \in V_1$ och $Q \in V_2$.

2019 16

Påst

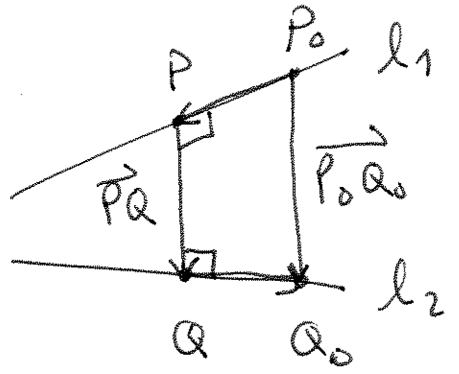
- Minsta avstånd erhålls om $\overrightarrow{PQ}$ är ortogonal mot l_1/Π_1 och l_2/Π_2.

[• Mer allmänt om $\overrightarrow{PQ}$ ortogonal mot V_1 och V_2.]

Bevis

- **I fallet l_1 & l_2:**

Antag att $P \in l_1$ och $Q \in l_2$ uppfyller att $\overrightarrow{PQ}$ är ortogonal mot l_1 och l_2.



Låt P_0 vara en godt. punkt på l_1 och låt Q_0 vara en godt punkt på l_2.

Då är $\overrightarrow{P_0P}$ och $\overrightarrow{QQ_0}$ parallella med l_1 respektive l_2, speciellt gäller att $\overrightarrow{P_0P} \perp \overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{QQ_0} \perp \overrightarrow{PQ}$. $\Rightarrow (\overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{QQ_0}) \perp \overrightarrow{PQ}$.

Obs att $\overrightarrow{P_0Q_0} = \overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ_0}$.

Nu gäller att

$$|\overrightarrow{P_0Q_0}|^2 = |\overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ_0}|^2 =$$

20/9 16

Års: 3

$$\left(\overrightarrow{PQ} + \left(\overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{QQ_0}\right)\right) \bullet \left(\overrightarrow{PQ} + \left(\overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{QQ_0}\right)\right) =$$

$$\underbrace{\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{PQ}}_{|\overrightarrow{PQ}|^2} + 2\underbrace{\overrightarrow{PQ} \bullet \left(\overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{QQ_0}\right)}_{\substack{= 0 \text{ ty} \\ \overrightarrow{PQ} \perp (\overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{QQ_0})}} + \underbrace{\left(\overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{QQ_0}\right) \bullet \left(\overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{QQ_0}\right)}_{|\overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{QQ_0}|^2}$$

$$= |\overrightarrow{PQ}|^2 + \underbrace{|P_0P + QQ_0|^2}_{\substack{\geq 0 \text{ ty längden av en vektor} \\ \text{är alltid } \geq 0}} \geq |\overrightarrow{PQ}|^2$$

Alltså $|\overrightarrow{P_0Q_0}| \geq |\overrightarrow{PQ}|$.

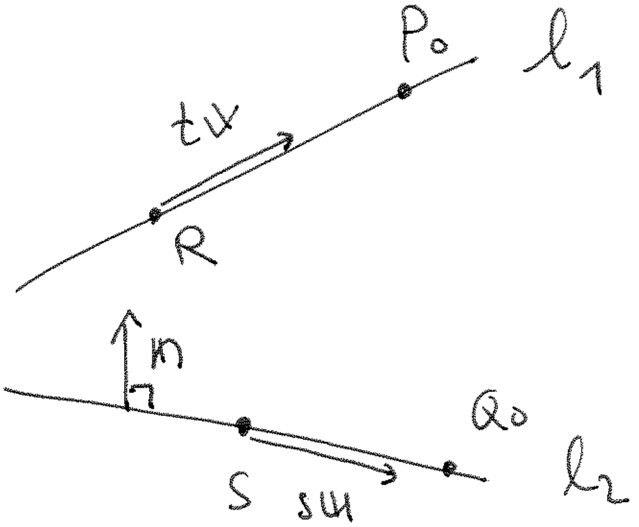
Alltså är avståndet mellan $P_0 \in l_1$ och $Q_0 \in l_2$ alltid $\geq$ avståndet mellan P och Q. $\square$

[• ~~I~~ fallet V_1 & V_2 följer verbatim med l_1 ersatt av V_1 och l_2 ersatt av V_2. $\square$]

20/9 16

Hitta P och Q så att $\overrightarrow{PQ}$ är ortogonal mot $l_1/\Pi_1/V_1$ och $l_2/\Pi_2/V_2$

Vi gör detta först i fallet då l_1 & l_2 är två icke-parallella linjer i $\mathbb{R}^3$.



Antag att
$l_1: R + t\mathbf{v}$ och
$l_2: S + s\mathbf{u}$

Låt $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$. Då är $\mathbf{n}$ ortogonal mot $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}$, d v s mot l_1 och l_2.

Välj sedan $P_0 \in l_1$ och $Q \in l_2$ godtyckligt.

Vi kan då skriva $\overrightarrow{P_0Q_0}$ som

$$\overrightarrow{P_0Q_0} = \overrightarrow{P_0Q_0}^{\perp} + \overrightarrow{P_0Q_0}',$$

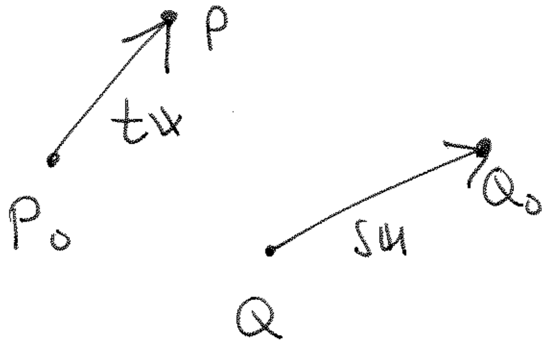
där $\overrightarrow{P_0Q_0}^{\perp}$ är (den ortogonala projektionen av $\overrightarrow{P_0Q_0}$ på $\mathbf{n}$ och därmed) ortogonal mot $\mathbf{u}$ & $\mathbf{v}$, och $\overrightarrow{P_0Q_0}'$ är parallell med planet span $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$; speciellt kan vi skriva $\overrightarrow{P_0Q_0}'$ som $\overrightarrow{P_0Q_0}' = t\mathbf{v} + s\mathbf{u}$ för något t, något s.

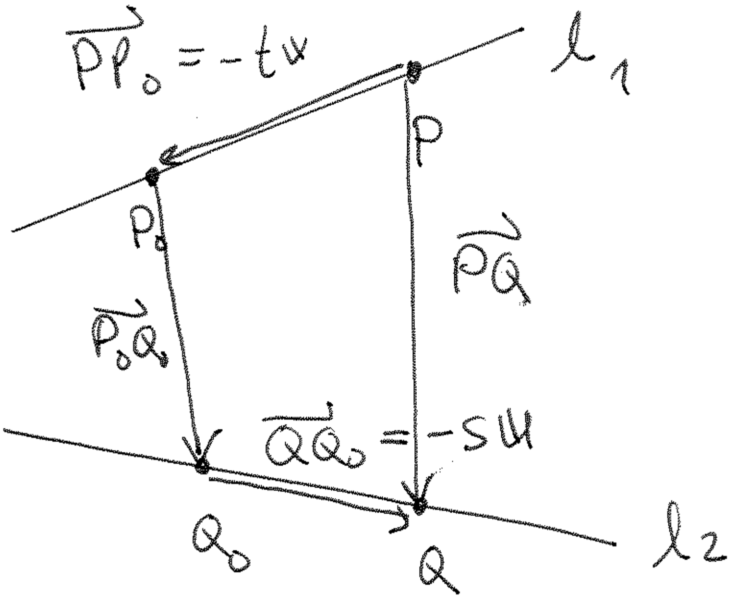
Låt nu $P = P_0 + t\mathbf{v}$

$$Q = Q_0 - s\mathbf{u}$$

så att $\overrightarrow{PP_0} = -t\mathbf{v}$

$$\overrightarrow{Q_0Q} = -s\mathbf{u}$$





Det är klart att $P \in l_1$, $Q \in l_2$.

Vi hävdar att $\overrightarrow{PQ}$ är ortogonal mot l_1 och l_2!

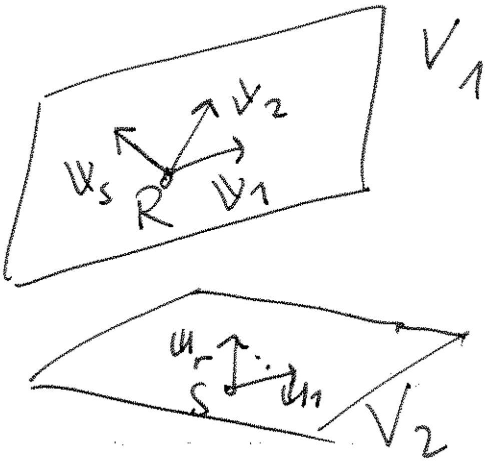
För att se det, observera att

$$\overrightarrow{PQ} = \underbrace{\overrightarrow{PP_0}}_{-t\mathbf{v}} + \underbrace{\overrightarrow{P_0Q_0}}_{=\underbrace{\overrightarrow{P_0Q_0}'}_{=t\mathbf{v}+s\mathbf{u}} + \overrightarrow{P_0Q_0}^{\perp}} + \underbrace{\overrightarrow{Q_0Q}}_{-s\mathbf{u}} =$$

$$= -t\mathbf{v} + t\mathbf{v} + s\mathbf{u} + \overrightarrow{P_0Q_0}^{\perp} - s\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0Q_0}^{\perp}.$$

Alltså $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P_0Q_0}^{\perp}$ som ~~är~~ ortogonal mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, dvs mot l_1 och l_2.
Alltså har vi hittat P och Q med de önskade egenskaperna.

Låt oss nu hitta P och Q i det allmänna fallet med V_1 och V_2 i $\mathbb{R}^n$:



Antag att V_1 och V_2 har parametriseringarna

$$V_1 : R + t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_s\mathbf{v}_s$$

$$V_2 : S + s_1\mathbf{w}_1 + \dots + s_r\mathbf{w}_r$$

Välj nu $P_0 \in V_1$ och $Q_0 \in V_2$ godtyckligt. Vi kan då skriva $\overrightarrow{P_0Q_0}$ som

$$\overrightarrow{P_0Q_0} = \overrightarrow{P_0Q_0}^{\perp} + \overrightarrow{P_0Q_0}'$$

där $\overrightarrow{P_0Q_0}^{\perp}$ är ortogonal mot span$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r)$, dvs mot V_1 & V_2, och $\overrightarrow{P_0Q_0}'$ är parallell med span$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r)$; speciellt kan vi skriva $\overrightarrow{P_0Q_0}'$ som

$$\overrightarrow{P_0Q_0}' = t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_s\mathbf{v}_s + s_1\mathbf{w}_1 + \dots + s_r\mathbf{w}_r$$

för några val av $t_1, \dots, t_s, s_1, \dots, s_r$.

Låt nu
$$P = P_0 + t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_s\mathbf{v}_s$$
$$Q = Q_0 - s_1\mathbf{w}_1 - \dots - s_r\mathbf{w}_r$$

så att
$$\overrightarrow{PP_0} = -t_1\mathbf{v}_1 - \dots - t_s\mathbf{v}_s$$
$$\overrightarrow{Q_0Q} = -s_1\mathbf{w}_1 - \dots - s_r\mathbf{w}_r$$

20/9 16 | Avs: 7

Det är klart $P \in V_1$ och $Q \in V_2$.

Vidare:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P_0Q_0} + \overrightarrow{Q_0Q} =$$

$$\overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P_0Q_0}^{\perp} + \overrightarrow{P_0Q_0}' + \overrightarrow{Q_0Q} =$$

$$(-t_1\mathbb{v}_1 - \dots - t_s\mathbb{v}_s) + \overrightarrow{P_0Q_0}^{\perp} +$$

$$(t_1\mathbb{v}_1 + \dots + t_s\mathbb{v}_s + s_1\mathbb{w}_1 + \dots + s_r\mathbb{w}_r) +$$

$$(-s_1\mathbb{w}_1 - \dots - s_r\mathbb{w}_r) = \overrightarrow{P_0Q_0}^{\perp}.$$

Alltså $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P_0Q_0}$ som är ortogonal mot span$(\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_s, \mathbb{w}_1, \dots, \mathbb{w}_r)$, dvs mot ~~…~~ V_1 och V_2.

Alltså har vi hittat P och Q med de önskade egenskaperna $\square$