Lite om algebraiska strukturer

— En grupp är en mängd med

- addition + (med kända räkneregler)
- nolla 0
- alla element a har en additiv invers $-a$, dvs $a+(-a)=0=(-a)+a$

Ex. $\mathbb{R}$ grupp $a+(-a)=(-a)+a=0$
så $-a$ additiv invers till $a\in\mathbb{R}$

Ex. Matriser av typ $m\times n$.
Nolla: $\mathbb{0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$

Additiv invers $(-1)A=-A$

— En ring är en grupp med

- multiplikation $\cdot$ (med kända räkneregler)
- etta 1

— En kropp (engelska field) är en ring
där • alla element $a\neq 0$ har en multiplikativ invers a^{-1}, dvs
$a^{-1}a=aa^{-1}=1$

Ex $\mathbb{R}$ kropp

$$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$$

multiplikativ invers till a

Ex Matriser av typ $n\times n$ - ring

etta: $I=\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}$

ej kropp ty A^{-1} existerar inte för alla A.

Ex $GL(n)=\{$inverterbara $n\times n$-matriser$\}$

kropp

(general linear group)

— Ett vektorrum över en kropp k är en grupp med

- multiplikation med skalär $\lambda\in k$ (med bra räkneregler)

Ex $\mathbb{R}^n$ är ett vektorrum över $\mathbb{R}$

<u>Ex</u> (Reella) matriser av typ $m \times n$ är ett vektorrum över $\mathbb{R}$.
(Kan identifieras med $\mathbb{R}^{m \cdot n}$.)

– En <u>algebra</u> (över en kropp k) är ett vektorrum över k med
- multiplikation

<u>Ex</u> $\mathbb{R}^3$ algebra över $\mathbb{R}$ med kryssprodukten som multiplikation
(<u>Obs</u> Icke-associativ algebra, eftersom kryssprodukten inte är associativ.)

<u>Övn</u> Vilka är grupper / ringar / kroppar / vektorrum (över vad?) / algebror (över vad?)?

- $\mathbb{N}$ naturliga tal
- $\mathbb{Z}$ heltal
- jämna heltal
- udda heltal
- $\mathbb{Q}$ rationella tal
- $\mathbb{R}$
- funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$
- $\mathbb{Q}^n =$ [redacted]
- $\mathbb{R}^n$
- kontinuerliga funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- inverterbara funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

etc...