Lösningar till Linjär algebra och geometri
TMA 660, 2013-10-22

1. (i) $l: \begin{cases} 2x+2y+z=5 \\ 2x-y-2z=-1 \end{cases}$. Sätt $z=t \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y=5-t \\ 2x-y=-1+2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2-t \\ x=\frac{1+t}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow$ linjen går genom $P_0\left(\frac{1}{2},2,0\right)$ och har riktning $\bar{v}=\left(\frac{1}{2},-1,1\right)$.

$\overrightarrow{P_0P}=(3,3,2)-\left(\frac{1}{2},2,0\right)=\left(\frac{5}{2},1,2\right)$

$\mathrm{proj}_{\bar{v}}\overrightarrow{P_0P}=\frac{\overrightarrow{P_0P}\cdot\bar{v}}{\|\bar{v}\|^2}\bar{v}=\frac{\frac{5}{4}-1+2}{\frac{1}{4}+1+1}\bar{v}=\bar{v}$

$\overrightarrow{P_0P}-\mathrm{proj}_{\bar{v}}\overrightarrow{P_0P}=\left(\frac{5}{2},1,2\right)-\left(\frac{1}{2},-1,1\right)=(2,2,1) \Rightarrow \mathrm{avst}(P,l)=|(2,2,1)|$
$=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\boxed{3}$.

(ii) $P_1(1,3,4)$, $P_2(3,-1,8) \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}=(2,-4,4)$.
Planet har normalriktning parallell med $\overrightarrow{P_1P_2}$. Välj $\bar{n}=(1,-2,2)$.
Dessutom går planet genom mittpunkten av P_1P_2: $M\left(\frac{1+3}{2},\frac{3-1}{2},\frac{4+8}{2}\right)$
alltså $M(2,1,6)$. Ekvationen för planet är
$1(x-2)-2(y-1)+2(z-6)=0 \iff \boxed{x-2y+2z=12}$.

2. $|(1,1,-1)|=\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\bar{e}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)}$
Normalen till planet är $\bar{n}=(1,1,1)$. Eftersom den sökta vektorn $\hat{e}_2$ är ortogonal på både $\hat{e}_1$ och $\bar{n}$, följer att den är parallell med $\bar{n}\times\bar{e}_1$

$\bar{n}\times\bar{e}_1=\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\bar{e}_1+2\bar{e}_2=-2(1,-1,0)$. Välj $\hat{e}_2=\frac{1}{|(1,-1,0)|}(1,-1,0)$

alltså $\boxed{\hat{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)}$. Den tredje vektorn $\hat{e}_3=\hat{e}_1\times\hat{e}_2=\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}$

$\Rightarrow \hat{e}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-\bar{e}_1-\bar{e}_2-2\bar{e}_3) \iff \boxed{\hat{e}_3=-\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)}$.

Koordinaterna för $(1,2,3)$ i basen $\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3$ ges av:

$\hat{x}_1=(1,2,3)\cdot\hat{e}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,2,3)\cdot(1,1,-1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1+2-3)=0$

$\hat{x}_2=(1,2,3)\cdot\hat{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,2,3)\cdot(1,-1,0)=\frac{1-2}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\hat{x}_3=(1,2,3)\cdot\hat{e}_3=-\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,3)\cdot(1,1,2)=\frac{-(1+2+6)}{\sqrt{6}}=\frac{-9}{\sqrt{6}}$

3.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & -2 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pivotelement 2 $\Rightarrow$ rang $A = 2$.

Kol(A) har bas $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

nolldim A + rang $A = 5 \Rightarrow$ nolldim $A = 3$

Nollrummet: $AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$ Sätt $\begin{cases} x_3 = t \\ x_4 = s \\ x_5 = u \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2t - 2s - 2u \\ x_2 = t - s - 3u \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t-2s-2u \\ t-s-3u \\ t \\ s \\ u \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

spänner upp (och linjärt oberoende)

Bas till nollrummet är $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. (i)
$$\begin{vmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ a & 0 & a & 1 \\ 1 & a & 0 & a \\ 0 & 1 & a & 0 \end{vmatrix} = -a \cdot \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^2(a^2-1) - (a^2-1) = (a^2-1)^2$$

Vektorerna är linjärt beroende omm determinanten är 0. Vi får $a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \pm 1}$.

(ii)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$
(the right-hand block is A^{-1})

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot \operatorname{adj}(B) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Lösningen är
$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}}$$

(5) Normalriktning till planet : $\bar{n} = (1,2,-1)$

$$F(\bar{u}) = \bar{u} - 2\,proj_{\bar{n}}\bar{u} = \bar{u} - 2\frac{\bar{u}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\bar{n}$$

$$F(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{2(x,y,z)\cdot(1,2,-1)}{6}(1,2,-1) = (x,y,z) - \frac{1}{3}(x+2y-z)(1,2,-1)$$

$$F(x,y,z) = \left(x - \frac{1}{3}(x+2y-z),\ y - \frac{2}{3}(x+2y-z),\ z + \frac{1}{3}(x+2y-z)\right)$$

$$= \frac{1}{3}(2x-2y+z, -2x-y+2z, x+2y+2z)$$

F har avbildningsmatrisen $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$G(\bar{u}) = \bar{u} \times \bar{a} \Rightarrow G(x,y,z) = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (y+z)\bar{e}_1 + (z-x)\bar{e}_2 - (x+y)\bar{e}_3 =$

$(y+z, z-x, -x-y)$

G har avbildningsmatrisen $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Då har $F \circ G$ avbildningsmatrisen $AB = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \boxed{AB = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -3 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$. Värdemängden till $F \circ G$ är $Kol(AB)$.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -3 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Kol(AB) = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} =$

planet som har normalriktning

$\bar{n}_0 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 15\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3$

$= 3\cdot(5,-1,-1)$.

Värdemängden är alltså planet $\boxed{5x - y - z = 0}$.

(6) i) Antag att $\lambda_1\bar{v} + \lambda_2 A\bar{v} + \lambda_3 A^2\bar{v} + \lambda_4 A^3\bar{v} = \bar{0}$, där $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,4}$.
Multiplicera ekvationen med A^3. Vi får:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 A^3\bar{v} + \lambda_2 A^4\bar{v} + \lambda_3 A^5\bar{v} + \lambda_4 A^6\bar{v} = \bar{0}. \\ \text{Eftersom } A^4\bar{v} = \bar{0} \Rightarrow A^5\bar{v} = A\bar{0} = \bar{0},\ A^6\bar{v} = A\bar{0} = \bar{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 A^3\bar{v} = \bar{0}.$$

Men $A^3\bar{v} \neq \bar{0} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$ Då blir $\lambda_2 A\bar{v} + \lambda_3 A^2\bar{v} + \lambda_4 A^3\bar{v} = \bar{0}$.

Multiplicera med $A^2 \Rightarrow \lambda_2 A^3\bar{v} + \lambda_3 \underbrace{A^4\bar{v}}_{=\bar{0}} + \lambda_4 \underbrace{A^5\bar{v}}_{=\bar{0}} = \bar{0} \Rightarrow \lambda_2 A^3\bar{v} = \bar{0}$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 0} \Rightarrow \lambda_3 A^2\bar{v} + \lambda_4 A^3\bar{v} = \bar{0}$. Multiplikation med A ger

$\lambda_3 A^3\bar{v} + \lambda_4 \underbrace{A^4\bar{v}}_{=\bar{0}} = \bar{0} \Rightarrow \lambda_3 A^3\bar{v} = \bar{0} \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 0} \Rightarrow \lambda_4 A^3\bar{v} = \bar{0} \Rightarrow \boxed{\lambda_4 = 0}$

ii) Antag att $A^3\bar{v} \neq \bar{0}$. Då är $\bar{v}, A\bar{v}, A^2\bar{v}, A^3\bar{v}$ linjärt oberoende enligt (i). Vi har 4 vektorer i $\mathbb{R}^3$ som är linjärt oberoende, omöjligt!

(7), (8) Teorifrågor, kolla boken s. 87 (Sats 4) och s. 132-133 (Lemma 3, 4, Sats 5).