Lösningar till tentamen 140113

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 & -1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} +1 & -1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \text{antalet pivot} = 3 \\ \text{rang } A = 3 \\ \text{nolldim } A = 5-3 = 2 \end{matrix}}.$$

$$\boxed{\text{Kol } A \text{ har bas } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Noll A:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_3 = t, \ x_5 = s \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = t+s \\ x_2 = -t-3s \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \\ x_5 = s \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{Noll}A = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

(också l. oberoende) alltså bas

2. (i)

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & a & a & a \\ 0 & b & a & a \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a-b & a-b & a-b \\ 0 & b & a & a \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = a \cdot (a-b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & a \\ 0 & b & a \end{vmatrix} =$$

$$= a(a-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a-b & a-b \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = a(a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix} = \boxed{a(a-b)^3}.$$

(ii) $Y = A - AX \Rightarrow X + A(A-AX) = A + I \iff (I - A^2)X = A - A^2 + I.$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow I - A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} 2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (I - A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - A^2 + I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad X = (I - A^2)^{-1}(A - A^2 + I) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$Y = A - AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

(3) $l_1: \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z+3=0 \end{cases}$ har riktningen $\bar{v}_1 \parallel \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ där $\bar{n}_1 = (1,-1,1)$, $\bar{n}_2 = (2,1,-1)$

$\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3 = (0,3,3)$. Välj $\bar{v}_1 = (0,1,1)$.

Linjen l_2 har riktningen $\bar{v}_2 = (-1,3,2) - (2,0,1) = (-3,3,1)$.

Planet genom l_1 parallell med l_2 har normalen $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= -2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3 = (-2,-3,3)$.

Planet π går dessutom genom $P_1(-1,0,1)$, en punkt på l_1. Då får man planets ekvation: $-2(x+1) - 3(y-0) + 3(z-1) = 0 \iff \underline{-2x-3y+3z-5=0}$.

Avståndet mellan linjerna är avståndet$((2,0,1), \pi) = \dfrac{|-4+3-5|}{\sqrt{4+9+9}} = \boxed{\dfrac{6}{\sqrt{22}}}$.

(4) $T(1,1,-1) = (-1,1,1)$
$T(-1,1,1) = (1,-1,1)$
$T(1,-1,1) = (1,1,-1)$

$\iff \begin{cases} T(\bar{e}_1) + T(\bar{e}_2) - T(\bar{e}_3) = (-1,1,1) \\ -T(\bar{e}_1) + T(\bar{e}_2) + T(\bar{e}_3) = (1,-1,1) \\ T(\bar{e}_1) - T(\bar{e}_2) + T(\bar{e}_3) = (1,1,-1) \end{cases} \iff \begin{cases} T(\bar{e}_1) = (0,1,0) \\ T(\bar{e}_2) = (0,0,1) \\ T(\bar{e}_3) = (1,0,0) \end{cases}$

$\Rightarrow$ avbildningens matris är $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

Man får $T(x_1,x_2,x_3) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_3, x_1, x_2)$. $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)$ omm $x_1 = x_2 = x_3$. Linjen $x_1 = x_2 = x_3$ skär triangelns plan $\pi: x_1+x_2+x_3 = 1$ i punkten $\boxed{Q\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$, som är just tyngdspunkten av triangeln.

(5) $\hat{e}_3$ ortogonal mot planet $x-y-z=3 \Rightarrow \hat{e}_3 \parallel (1,-1,-1)$. Sätt $\hat{e}_3 = \dfrac{(1,-1,-1)}{|(1,-1,-1)|} \rightarrow$

$\boxed{\hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)}$.

$\left.\begin{array}{l} \text{Eftersom } \hat{e}_1 \perp \hat{e}_3 \Rightarrow \hat{e}_1 \perp (1,-1,-1). \\ \text{Eftersom } \hat{e}_1 \parallel \text{ planet } x+y+2z=5 \Rightarrow \hat{e}_1 \perp (1,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{e}_1 \parallel (1,-1,-1) \times (1,1,2)$.

$(1,-1,-1) \times (1,1,2) = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$. Sätt $\boxed{\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,3,-2)}$

$\Rightarrow \boxed{\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{42}}(5,1,4)}$.

Koordinaterna av $\bar{u} = (1,1,1)$ i den nya basen ges av:

$$\bar{u}\cdot\hat{e}_1 = \frac{2}{\sqrt{14}} \quad ; \quad \bar{u}\cdot\hat{e}_2 = \frac{10}{\sqrt{42}} \; ; \quad \bar{u}\cdot\hat{e}_3 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \implies \boxed{\bar{u} = \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{e}_3 + \frac{10}{\sqrt{42}}\hat{e}_2}$$

(6). Ekvationen $A\bar{x} = \bar{0}$ har icke-trivial lösning eftersom antalet ekvationer är mindre än antalet obekanta (eller kolonnerna till A måste vara linjärt beroende p.g.a. n vektorer i $\mathbb{R}^m$ (och $n > m$) är linjärt beroende). Då får man att ekvationen $A^T A\bar{x} = A^T\bar{0} = \bar{0}$ har en icke-trivial lösning. Matrisen $A^T A$ är kvadratisk. Då kan $A^T A$ inte vara inverterbar $\Rightarrow \det(A^T A) = 0$.

(7) Se kursboken Sats 3 (s. 174–175).

(8) Se kursboken Sats 1 (s. 65) och Sats. 6 (s. 77–78).