

Tentamen

Linjär algebra och geometri, TMA660

140818 kl. 08.30–12.30

Examinator: Iulia Pop, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: doktorand, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa

Betygsgränserna är följande: betyg 3 (24 poäng), betyg 4 (36 poäng), betyg 5 (48 poäng). För att få maximalt poäng krävs kompletta detaljerade lösningar. Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast första vardagen efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

1. Linjen l går genom $(1, 2, 5)$, skär linjen $(x, y, z) = (2, 3, 1) + t(3, 2, 2)$ och är parallell med yz -planet. Bestäm en ekvation för l på parametrisk form. (6p)
2. Beräkna spegelbilden av punkten $(1, 1, 6)$ i planet $2x + 2y + z = 1$. (8p)
3. Beräkna avståndet mellan linjen $l_1 : (x, y, z) = (3 + t, 1 - t, 3 + 3t)$ och linjen l_2 som går genom punkterna $(2, -1, -3)$ och $(1, -2, 1)$. (8p)
4. (i) Bestäm alla värden på a för vilka följande matris är inverterbar (4p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a^2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Lös matrizekvationen (4p)

$$(AX + B)^{-1} = A,$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

5. Låt A vara en 4×6 matris och B en 6×4 matris. Visa att $\det(BA) = 0$. (6p)
6. Låt $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som ges av spegling i linjen $x_1 + 2x_2 = 0$ följt av rotation vinkeln $\pi/4$ (moturs). Bestäm matrisen för T m.a.p. standardbasen i \mathbb{R}^2 . (8p)
7. (i) Formulera basatsen i \mathbb{R}^n . (2p)
(ii) Låt A vara en $n \times n$ matris. Visa att följande villkor är ekvivalenta: (6p)
 - (a) Kolonnerna till A utgör en bas för \mathbb{R}^n .
 - (b) Ekvationen $AX = 0$ har bara trivial lösning.
 - (c) Ekvationen $AX = Y$ är lösbar för alla $Y \in \mathbb{R}^n$.
8. (i) Definiera basbytematrisen mellan två baser i \mathbb{R}^n . Given en godtycklig vektor u , vilket samband finns mellan koordinaterna till u med avseende på två olika baser? Motivera! (4p)
(ii) Om $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning, vilket samband finns mellan avbildningsmatriserna för F med avseende på två olika baser? Motivera! (4p)

Lycka till!
Iulia Pop