Lösningar till Tentamen i Linjär algebra och geometri, TMA660

140818

1. Låt $\bar{v} = (a,b,c)$ vara en riktningsvektor till linjen l.
Eftersom $\bar{v}$ är parallell med yz-planet, måste $a=0$. Linjen l ges av

$$l: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2+tb \\ z = 5+tc \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

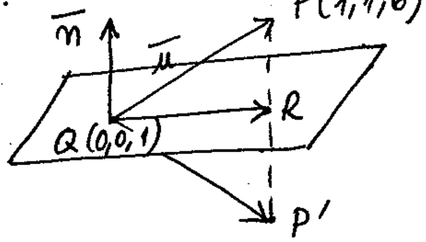
Å andra sidan, l skär linjen $l': \begin{cases} x = 2+3s \\ y = 3+2s \\ z = 1+2s \end{cases}$

$\Rightarrow$ systemmet $\begin{cases} 2+3s = 1 \\ 3+2s = 2+tb \\ 1+2s = 5+tc \end{cases}$ är lösbart. Vi får $s = -\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} tb = \frac{1}{3} \\ tc = -\frac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{b}{c} = -\frac{1}{14} \Leftrightarrow c = -14b \Rightarrow \bar{v} = (0,b,-14b) = b(0,1,-14),\ b \neq 0$. Välj $b =$ (t.ex.)

Linjen l ges då av följande: $\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 2+t \\ z = 5-14t \end{cases}}$

2.



Normalen till planet är $\bar{n} = (2,2,1)$.
Välj $Q(0,0,1)$ i planet. Låt $\bar{u} = \overrightarrow{QP} = (1,1,5)$.

$$\operatorname{proj}_{\bar{n}} \bar{u} = \frac{\bar{u}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\,\bar{n} = \frac{2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 5}{2^2+2^2+1^2}\,\bar{n} = \bar{n}$$

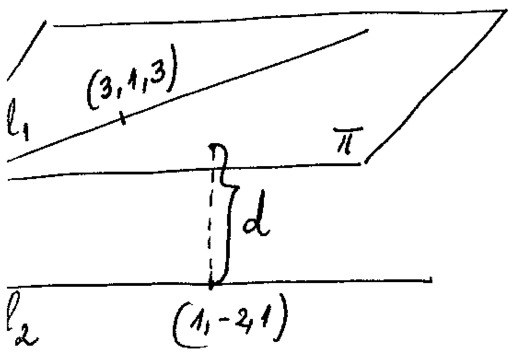
$\Rightarrow \overrightarrow{RP} = \operatorname{proj}_{\bar{n}} \bar{u} = \bar{n}$.

Vi får $\overrightarrow{P'P} = 2\overrightarrow{RP} = 2\bar{n} = (4,4,2)$ eftersom R är mittpunkt på PP'.

$\overrightarrow{P'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'} = (4,4,2) \Rightarrow \overrightarrow{OP'} = (1,1,6) - (4,4,2) = (-3,-3,4)$.

Spegelbilden är alltså $\boxed{P'(-3,-3,4)}$.

3. l_1 har riktningsvektor $\bar{v}_1 = (1,-1,3)$
l_2 har riktningsvektor $\bar{v}_2 = (1,-2,1) - (2,-1,-3) = (-1,-1,4)$.



Låt π vara planet genom l_1 parallellt med l_2.
En normalriktning $\bar{n}$ till π ges av

$$\bar{n} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -\bar{e}_1 - 7\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 = (-1,-7,-2).$$

Planet π går genom punkten $(3,1,3)$ som ligger på l_1. Då får vi planets ekvation:

$$(-1)(x-3)-7(y-1)-2(z-3)=0 \iff x+7y+2z-16=0.$$

Det sökta avståndet mellan linjen l_1 och linjen l_2 är lika med avståndet från l_2 till planet π. Eftersom l_2 är parallell med planet enligt konstruktionen, räcker det att beräkna avståndet från t.ex. $(1,-2,1)$ till planet π. Vi får:

$$d = \text{avstånd}(l_1, l_2) = \text{avstånd}((1,-2,1), \pi) = \frac{|1+7\cdot(-2)+2\cdot 1-16|}{\sqrt{1^2+7^2+2^2}} =$$
$$= \frac{27}{\sqrt{54}} = \frac{27}{3\sqrt{6}} = \boxed{\frac{3\sqrt{6}}{2}}.$$

4. (i) Matrisen A är inverterbar omm $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ a^2 & 1-a^2 & 1-a^2 \end{vmatrix} = (a-1)(1-a^2) = -(a-1)^2(a+1) \neq 0$$

omm $a \neq \pm 1$. Alltså är $\boxed{A \text{ inverterbar omm } a \neq \pm 1}$.

(ii) $(AX+B)^{-1} = A \iff AX+B = A^{-1} \iff AX = A^{-1}-B \iff$

$\iff X = A^{-1}(A^{-1}-B)$. Vi beräknar A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}-B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -3 & -6 & -6 \\ -8 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

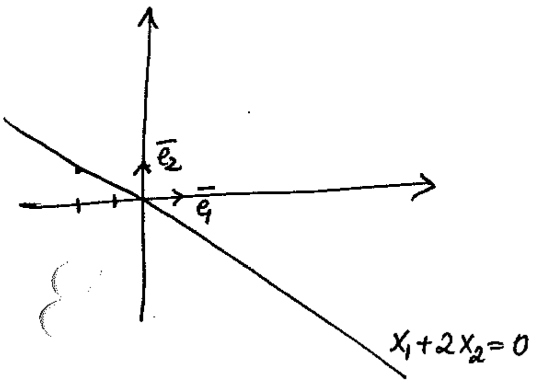
$$X = A^{-1}(A^{-1}-B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -3 & -6 & -6 \\ -8 & -7 & -8 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ -11 & -11 & -10 \end{pmatrix}}$$

5. Eftersom BA är en 6×6-matris, alltså kvadratisk, räcker det att visa att BA är ej inverterbar.

Vi vet att A är en 4×6-matris. Då har ekvationen $AX=0$ icke-trivial lösning ty $AX=0$ är ekvivalent med ett system med 4 ekvationer och 6 obekanta. Då har ekvationen $BAX=0$ också icke-trivial lösning. Satsen om inverterbara matriser implicerar att BA är ej inverterbar. Alltså måste $\det(BA)=0$.

⑥. T är sammansättningen av två linjära avbildningar : $T = T_2 \circ T_1$ där T_1 är speglingen och T_2 är rotationen.

Om A_1 och A_2 är avbildningsmatriserna till T_1 respektive T_2, då är avbildningsmatrisen till T just $A_2 A_1$. Låt oss beräkna A_1 och A_2.



$T_1(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 - 2\,\mathrm{proj}_{\bar{n}}\bar{e}_1$ där $\bar{n} = (1,2)$ är normal till linjen.

$T_1(\bar{e}_2) = \bar{e}_2 - 2\,\mathrm{proj}_{\bar{n}}\bar{e}_2$

$$\mathrm{proj}_{\bar{n}}\bar{e}_1 = \frac{\bar{e}_1 \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2}\,\bar{n} = \frac{(1,0)\cdot(1,2)}{1^2+2^2}\,\bar{n} = \frac{1}{5}\bar{n} = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

$$\Rightarrow T_1(\bar{e}_1) = (1,0) - 2\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$$

$$\mathrm{proj}_{\bar{n}}\bar{e}_2 = \frac{\bar{e}_2 \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2}\,\bar{n} = \frac{(0,1)\cdot(1,2)}{5}\,\bar{n} = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\Rightarrow T_2(\bar{e}_2) = (0,1) - 2\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

Matrisen till speglingen är alltså $A_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Rotationen $\pi/4$ moturs har motsvarande matris $A_2 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$

Avbildningsmatrisen till T är alltså

$$A = A_2 A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{10} & -\frac{\sqrt{2}}{10} \\ -\frac{\sqrt{2}}{10} & -\frac{7\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix}}.$$

⑦ (i) <u>Bassatsen</u>: För rummet $\mathbb{R}^n$ gäller:

(1) varje bas i $\mathbb{R}^n$ har n element

(2) n stycken vektorer i $\mathbb{R}^n$ är en bas $\Longleftrightarrow$ de är linjärt oberoende $\Longleftrightarrow$ de spänner upp $\mathbb{R}^n$.

(3) fler än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ är alltid linjärt beroende
färre än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ kan inte spänna upp $\mathbb{R}^n$.

(ii) (a) $\Rightarrow$ (b). Antag att kolonnerna $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ utgör en bas. Då är de linjärt oberoende. Ekvivalent, ekvationen $x_1\bar{a}_1 + \dots + x_n\bar{a}_n = \bar{0}$ har bara trivial lösning. På matrisform, är ekvationen ekvivalent med

$$[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow AX = 0.$$ Då får vi att (b) gäller.

Omvänt, om (b) gäller, då har ekv. $x_1\bar{a}_1 + \dots + x_n\bar{a}_n = \bar{0}$ trivial lösning $\Rightarrow \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ linj. oberoende $\xRightarrow{\text{bassatsen}}$ $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ är en bas. Vi får att (a) gäller.

(a) $\Rightarrow$ (c). Antag att $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ är en bas. Då spänner de upp $\mathbb{R}^n$.
$\Rightarrow$ varje $Y \in \mathbb{R}^n$ är en linjärkombination av $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$, dvs.
$Y = x_1 \bar{a}_1 + \cdots + x_n \bar{a}_n$ där $x_1, \ldots, x_n$ reella. Ekvivalent, $Y = AX$ där
$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Då är ekv. $AX = Y$ lösbart, för varje $Y \in \mathbb{R}^n$.
Omvänt, antag att ekv. $AX = Y$ lösbart för varje Y, då är Y en linjärkombination av $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ $\Rightarrow$ $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$
Bassatsen implicerar då att $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ bas, alltså får vi (a).

8. (i) Låt $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ och $\bar{e}_1', \ldots, \bar{e}_n'$ vara två baser i $\mathbb{R}^n$. Antag

$$\begin{cases} \bar{e}_1' = s_{11}\bar{e}_1 + s_{21}\bar{e}_2 + \cdots + s_{n1}\bar{e}_n \\ \bar{e}_2' = s_{12}\bar{e}_1 + s_{22}\bar{e}_2 + \cdots + s_{n2}\bar{e}_n \\ \text{---} \\ \bar{e}_n' = s_{1n}\bar{e}_1 + s_{2n}\bar{e}_2 + \cdots + s_{nn}\bar{e}_n \end{cases}$$

Matrisen $S = [s_{ij}]$ är basbytematrisen.
Om $\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + \cdots + x_n\bar{e}_n = x_1'\bar{e}_1' + \cdots + x_n'\bar{e}_n'$ är koordinatframställningarna av vektorn $\bar{u}$ m.a.p. de två baserna, då gäller följande: $\boxed{X = SX'}$,
där $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$.

Bevis: $\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i = \sum_{j=1}^{n} x_j' \bar{e}_j' = \sum_{j=1}^{n} x_j' \sum_{i=1}^{n} s_{ij}\bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_j'\right)\bar{e}_i \Rightarrow$

$\Rightarrow x_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_j'$, eftersom $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ är en bas.
Ekvivalent, $X = SX'$.

(ii) Om $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning, kan den uttryckas på matrisform som $Y = AX$ med avseende på basen $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$, och som $Y' = A'X'$ med avseende på basen $\bar{e}_1', \ldots, \bar{e}_n'$.
Men $X = SX'$ och $Y = SY'$ implicerar att $SY' = ASX'$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow Y' = S^{-1}ASX'$. Alltså är $\boxed{A' = S^{-1}AS}$, där S är basbytematrisen.