MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa
Datum: 2015-01-03 kl. 8.30–12.30
Telefonvakt: Gustav Kettil
Telefon: 0703 088 304

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna (om inte annat nämns)!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 24 p, 4: 36 p, 5: 48 p.
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & -3 \\ 3 & 9 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & 9 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$.

Bestäm en bas till kolonnrummet för A, en bas till nollrummet för A, rangen av A och nolldimensionen av A. (8 p)

2. Låt $p(z) = (z-1)^8 - 16$.

(a) Hur många komplexa nollställen har $p(z)$? (1 p)

(b) Lös ekvationen
$$p(z) = 0.$$
Ange lösningarna på formen $a + bi$, där $a, b \in \mathbb{R}$. Rita ut lösningarna i det komplexa talplanet. (6 p)

(c) Hur många reella nollställen har $p(z)$? (1 p)

3. (a) Låt P vara parallellepipeden som spänns av vektorerna $\mathbf{v}_1 = (2,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,2,1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,1,2)$. Bestäm volymen av P. (2 p)

(b) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, där $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Bestäm volymen av $f(P)$. (2 p)

(c) Låt $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen $\mathbf{x} \to 4\mathbf{x}$. Bestäm volymen av $g(P)$. (2 p)

(d) Låt $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen som skickar en vektor på dess spegelbild i planet $x_3 = 0$. Bestäm volymen av $h(P)$. (2 p)

4. Låt $P_1 = (2,0,0)$, $P_2 = (0,2,0)$. Bestäm mängden av punkter Q i rummet som är på samma avstånd från P_1 som från P_2. (6 p)

5. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 p. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen på uppgift (a)-(f) är dock ≥ 0. (6 p)

(a) Om $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är linjärt oberoende så är $\mathbf{u}$, $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ och $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ linjärt oberoende.

(b) Antag att A är en $n \times n$-matris. Om $|A| = 0$ så är $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ej lösbart för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

(c) Om produkten AB är väldefinierad så är $\mathrm{rang}(AB) = \mathrm{rang}(A) \times \mathrm{rang}(B)$.

(d) Antag att A är en $n \times n$-matris. Då har $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ en eller oändligt många lösningar.

(e) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara spegling i linjen $x + y + 1 = 0$. Då är f en linjär avbildning.

(f) Antag att A är en 1×3-matris. Då är $|A^T A| = 0$.

Till följande uppgifter räcker det med svar. (2 p)

(g) Ange en matris med rang 2.

(h) Ange en matris med determinant -1.

6. Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som avbildar $(1, 1, 1)$ på $(0, 0, 0)$, $(1, -1, 0)$ på sig själv och $(1, 0, -1)$ på sig själv. Bestäm avbildningsmatrisen till A med avseende på standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Vilka vektorer i $\mathbb{R}^3$ avbildas på sig själva? Beskriv f geometriskt. (8 p)

7. Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vara vektorer i rummet ($\mathbb{R}^3$). (6 p)

(a) Definiera vektorprodukten (=kryssprodukten) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

(b) Visa att vektorprodukten är antikommutativ, d v s att $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

(c) Visa att

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|. \tag{1}$$

När råder likhet i (1)?

(d) Visa, förslagsvis genom att ge ett motexempel, att vektorprodukten inte är associativ, d v s att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

i allmänhet.

8. Visa att en avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär om och endast om den är på formen $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ för någon $(m \times n)$-matris A. (8 p)

Lycka till!
Elizabeth