TMA 660 Linjär algebra och geometri 4/1 16 lösning (1)

1 a)

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) & (-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} \underset{\text{utv. kolonn 2}}{=} (-1)^{1+2}\, 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} (-1)$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} -1 \cdot (10 + 9 - 12) = \underline{\underline{-7}}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}}$$ eftersom rad 2 & 4 lika.

b) $|A_1| \neq 0 \Rightarrow f_1$ surjektiv, dvs $\underline{\underline{f_1\text{:s värdemängd är } \mathbb{R}^4}}$

Låt $v_1, \dots, v_4$ vara A_2:s kolonner. Obs v_1, v_3, v_4 kolonner också i A_1. $|A_1| \neq 0 \Rightarrow v_1, v_3, v_4$ linj. oberoende. Alltså $|A_2| = 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3, v_4$ linjärt beroende.

$\underline{\underline{\text{Värdemängd}(A_2)}} = \text{Kolonn}(A_2) = \text{span}(v_1, v_3, v_4) =$
$\underline{\underline{\text{span}\big((2,2,1,2), (-1,1,2,1), (-2,1,1,1)\big)}}$.

c) Obs y är kolonn nr. 2 i A_1. $|A_1| \neq 0 \Rightarrow v_1, y, v_3, v_4$ linjärt oberoende. Alltså $\underline{\underline{y \notin \text{Bilden}(f_2)}} = \text{Kolonn}(A_2) =$ span(v_1, v_3, v_4).

---

2 a) SANT ($Ax = 0$ alltid lösbart)

b) SANT (rang = ~~[illegible]~~ maximal ordning på nollskild underdet)

c) FALSKT (minsta kvadratmetoden ger ej entydig lösning i allmänhet)

d) FALSKT ($p(z)$ reella koeff $\Rightarrow \big(p(a) = 0 \Rightarrow p(\bar{a}) = 0\big)$)

e) FALSKT (rang$(A) \leq \min(m,n)$ om A typ $m \times n$)

f) FALSKT ($f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linjär är aldrig injektiv)

g) SANT ($\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ span$\big((1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)\big)$ har dim högst 2 $\Rightarrow$ finns ∞ många vinkelräta vektorer)

3a) $A = \mathbf{v}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{v} & 2\mathbf{v} & 3\mathbf{v} \\ | & | & | \end{bmatrix}$

Span(A) = span$(\mathbf{v}, 2\mathbf{v}, 3\mathbf{v})$ = span$(\mathbf{v})$ = span$((1,2,3))$

rang(A) = dim(span $\mathbf{v}$) = $\underline{\underline{1}}$

nolldim(A) = 3 - rang(A) = $\underline{\underline{2}}$

Obs $A\mathbf{x} = \mathbf{v}\underbrace{\mathbf{v}^T\mathbf{x}}_{[\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}]} = \mathbf{v}[\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}]$. Alltså $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ om $\mathbf{v}\cdot\mathbf{x} = 0$, ~~dvs~~ dvs om $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$.

Alltså $\Pi = \{x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\} \subseteq$ Noll(A).

Å andra sidan Noll(A) har dim 2. Alltså är Noll(A) = Π

b) $A^r = \mathbf{v}\underbrace{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}_{\substack{[\mathbf{v}^T\mathbf{v}] = \\ [1^2+2^2+3^2] = [14]}}\mathbf{v}^T \cdots \mathbf{v}\mathbf{v}^T = \mathbf{v}[14]^{r-1}\mathbf{v}^T = 14^{r-1}\mathbf{v}\mathbf{v}^T = \underline{14^{r-1}A}$

rang, nolldim, kolonnrum, nollrum samma som för A.

4a) Volymen av $T = \left|\frac{1}{6}\underbrace{\left|\overrightarrow{P_1P_4}\ \overrightarrow{P_2P_4}\ \overrightarrow{P_3P_4}\right|}\right| = \frac{1}{6}54 = \underline{\underline{9}}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 27\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 27(1+1) = 54$$

b) $\Pi = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ har normalvektor $\mathbf{n} = (1,1,1)$

Då $f(\mathbf{x})$ = ortoproj av $\mathbf{x}$ på $\Pi = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{\underbrace{|\mathbf{n}|^2}_{=3}}\mathbf{n}$

$f(P_1) = f(\overrightarrow{OP_1}) = (3,0,0) - \frac{(3,0,0)\cdot(1,1,1)}{3}(1,1,1) =$

$(3,0,0) - (1,1,1) = (2,-1,-1)$

$f(P_2) = \ldots = (-1,2,-1)$, $f(P_3) = \ldots = (-1,-1,2)$

$f(P_4) = (3,3,3) - \frac{(3,3,3)\cdot(1,1,1)}{3}(1,1,1) = (0,0,0) = \mathbf{0}$

Låt τ vara triangeln med hörn $Q_1 = (2,-1,-1)$, $Q_2 = (-1,2,-1)$ och $Q_3 = (-1,-1,2)$. Obs att $f(P_4) = \mathbf{0}$ är tyngdpunkten i τ. Slutsats: $\underline{f(T) = \tau}$

Arean av $\tau = \left|\frac{1}{2}\underbrace{\left|\overrightarrow{Q_1Q_2} \times \overrightarrow{Q_1Q_3}\right|}\right| = \underline{\underline{\frac{9}{2}\sqrt{3}}}$

$$\left\|\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right\| = |(9,9,9)| = 9\sqrt{3}$$

TMA 660 4/1 16

5a) $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix}$ ortogonal $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $a_i \cdot a_j = \begin{cases} 1 & \text{om } i=j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$

$\Leftrightarrow A^TA = \begin{bmatrix} - & a_1 & - \\ & \vdots & \\ - & a_n & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix} = I$

$\underline{A^TA = I} \Rightarrow |A^TA| = |I| = \boxed{1} \Leftrightarrow \underline{|A| = \pm 1}$

$|A^TA| = |A^T||A| = \boxed{|A|^2}$

b) $|A| = \pm 1 \not\Rightarrow A$ ortogonal

T ex, låt $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Då $a_2 \cdot a_2 = (0,2) \cdot (0,2) = 4 \neq 1$

Alltså A ej ortogonal.

Men $|A| = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1/2 \cdot 2 = 1$

---

6 Minns $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

Injektiv? Nej Låt t ex $z_1 = 0$ $z_2 = i2\pi$.

Då $e^{z_1} = e^0(\cos 0 + i \sin 0) = 1$ $e^{z_2} = e^0(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 1$

Alltså $e^{z_1} = e^{z_2} \not\Rightarrow z_1 = z_2$ Alltså ej injektiv

Surjektiv: Obs att $e^z = 0$ saknar lösning, eftersom

$e^z = \underbrace{e^x}_{\substack{\neq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}}} \underbrace{(\cos y + i \sin y)}_{\neq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}} \neq 0$. Alltså ej surjektiv

Bijektiv: ej bijektiv ty varken surjektiv eller injektiv

---

7 Se Sparr kap 5.3

---

8 A^{-1} uppfyller $A^{-1}A = I = AA^{-1}$ (*)

Antag att A_1^{-1} & A_2^{-1} uppfyller (*).

Då $\boxed{A_1^{-1} = A_1^{-1}I = A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = (A_1^{-1}A)A_2^{-1} = IA_2^{-1} = A_2^{-1}}$ Alltså $A_1^{-1} = A_2^{-1}$. Alltså inversen entydigt bestämd.

A_2^{-1} uppfyller (*) $\Rightarrow AA_2^{-1} = I$

matrisprod associativ

A_1^{-1} uppfyller (*) $\Rightarrow A_1^{-1}A = I$