

### TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt  $T$  vara tetraedern med hörn  $P_1 = (-1, -1, -1)$ ,  $P_2 = (1, 0, 0)$ ,  $P_3 = (0, 1, 0)$  och  $P_4 = (0, 0, 1)$ . Vidare låt  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vara skalning med en faktor 3.

(a) Bestäm volymen av  $T$ .

**Tips:** Använd att volymen av en kon (speciellt en tetraeder) med basarea  $B$  och höjd  $h$  är  $\frac{1}{3} \cdot B \cdot h$ .

(b) Bestäm areorna av  $T$ 's sidor.

(c) Bestäm längderna av  $T$ 's kanter.

(d) Bestäm avbildningsmatrisen för  $f$ .

(e) Beskriv bilden  $f(T)$  av  $T$  under  $f$ . Vad är volymen av  $f(T)$ ?

(f) Vad är areaorna av  $f(T)$ 's sidor? Vad är längderna av  $f(T)$ 's kanter?

(9 p)

2. Låt  $p(z) = z^6 + 2z^4 + z^2$ .

(a) Skriv  $p$  på formen  $c(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$ , där  $c, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  är komplexa tal.

(b) Faktorisera  $p$  reellt, det vill säga skriv  $p$  som en produkt av polynom med reella koefficienter och av så liten grad som möjligt.

(c) Hur många reella nollställen har  $p(z)$ ?

(d) Hur många rent imaginära nollställen, dvs på formen  $ai$ , där  $a \in \mathbb{R}$ , har  $p(z)$ ? (7 p)

3. (a) Hitta en minsta kvadratlösning  $\hat{\mathbf{x}}$  till ekvationssystemet  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ,

$$\text{där } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Beräkna felet  $|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}|$ .

(6 p)

4. Låt  $A$  och  $B$  vara  $(n \times n)$ -matriser där  $n \geq 2$ .

(a) Gäller det att om  $|AB| = 0$  så är  $|BA| = 0$ ? Motivera ditt svar. Om svaret är nej räcker det att ange motexempel.

(b) Gäller det att om  $AB = \mathbf{0}$  så är  $BA = \mathbf{0}$ ? Motivera ditt svar. Om svaret är nej räcker det att ange motexempel.

(4 p)

5. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock  $\geq 0$ . (6 p)
- (a) Antag att  $A$  är en  $(6 \times 6)$ -matris av rang 4. Då är alla underdeterminanter av ordning 4 lika med noll.
  - (b) Vektorn  $(4, -3)$  är vinkelrät mot linjen  $\ell : (1, 2) + t(3, 4), t \in \mathbb{R}$ .
  - (c) Låt  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara spegling i linjen  $\ell = \{2x + 3y = 4\}$ . Då är  $f$  en linjär avbildning.
  - (d) Vektorn  $(1, 2, 3)$  är parallell med planet  $\{x + 2y + 3z = 0\}$ .
  - (e) Matrisen  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  har en vänsterinvers.
  - (f) Det finns oändligt många linjära avbildningar  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  som uppfyller att  $f(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$ ,  $f(1, 1, 0) = (1, 0, 1)$  och  $f(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$ .
6. Låt  $P$  och  $Q$  vara punkter i rummet och låt  $\Pi$  vara planet  $\Pi = \{x + 2y + 3z = 0\}$ . Vidare låt  $P'$  och  $Q'$  vara den ortogonala projektionen av  $P$  respektive  $Q$  på  $\Pi$ . Visa att avståndet mellan  $P$  och  $Q$  är större än eller lika med avståndet mellan  $P'$  och  $Q'$ . När råder likhet? (6 p)
7. Formulera och bevisa den distributiva lagen för vektorprodukt (inklusive lemmat). (6 p)
8. Låt  $A$  vara en  $m \times n$ -matris och låt  $T$  vara en trappformad matris, ekvivalent med  $A$ , dvs  $T$  kan fås genom elementära radoperationer på  $A$ .
- (a) Visa att rangen av  $A$  är lika med antalet pivotelement i  $T$ .
  - (b) Visa att nulldimensionen av  $A$  är lika med  $n$  minus antalet pivotelement i  $T$ . (6 p)

Lycka till!

Elizabeth