MATEMATIK **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2017-10-23 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen Telefonvakt: Elizabeth Wulcan
Telefon: 031-772 53 47

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt A vara matrisen $\begin{bmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

För alla värden på a, bestäm A's rang, nolldimension, kolonnrum och nollrum. (8 p)

2. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på linjen $\ell : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestäm avbildningsmatrisen A för f.
(b) Beräkna A^2. Beräkna A^3.
(c) Är A inverterbar? Bestäm i så fall A^{-1}.
(d) För vilka $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ gäller att $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$? (7 p)

3. Avgör om planen $\Pi_1 : \begin{cases} x = 1 + 4s + 7t \\ y = 2 + 5s + 8t \\ z = 3 + 6s + 9t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}$
och $\Pi_2 = \{x - 2y + z = 2\}$ är parallella. (5 p)

4. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 p. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (6 p)

(a) Antag att $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$. Då är $\mathbf{u}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ en bas för $\mathbb{R}^3$.
(b) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling i planet $x - y - 3z = 0$. Då är f en isometri.
(c) Ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 6 \end{cases}$ har en unik lösning.
(d) Antag att $p(z)$ är ett polynom med reella koefficienter. Då har $p(z)$ åtminstone ett reellt nollställe.
(e) För alla vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gäller att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \times (\mathbf{x} \times \mathbf{w}).$$

(f) Låt A vara en $(n \times n)$-matris. Antag att $|A| = 0$. Då gäller för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart.

5. Minns att H är en högerinvers till A om $AH = I$.

Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Avgör om A har en högerinvers.

(b) Avgör om AB har en högerinvers.

(c) Avgör om ABC har en högerinvers. (6 p)

6. Låt T vara en tetraeder i rummet med hörn i punkterna P_1, P_2, P_3 och P_4. Låt M vara T's tyngdpunkt och låt S vara tetraedern med hörn i P_1, P_2, P_3 och M. Antag att volymen av T är 1. Beräkna volymen av S.

Tips: Minns att M uppfyller

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\big(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{OP_4}\big),$$

där O är en godtycklig punkt i rummet. (6 p)

7. (a) Definiera den komplexa exponentialfunktionen.

(b) Visa att $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$. (6 p)

8. Antag att $\tilde{\mathbf{x}}$ är en lösning till ekvationen

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}.$$

Visa att då gäller för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ att

$$|A\mathbf{x} - \mathbf{b}| \geq |A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}|.$$

(6 p)

Lycka till!

Elizabeth