1) $|A| = \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2+a^2+a^2-a^3-a^2-a = -a(a^2-2a+1) = -a(a-1)^2$

Om $a \neq 0,1$ så $|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ inverterbar $\Leftrightarrow$ Kolonn$(A) = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$ Noll$(A) = \{0\}$ (huvudsatsen) $\Leftrightarrow$ rang$(A)=3 \Leftrightarrow$ nolldim$(A)=0$

$a=0$: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Klart att $(1,1,1)$, $(1,0,1)$ linj ober (ej parallella) $\therefore$ Kolonn A = span$((1,1,1),(1,0,1))$, rang $A = 2$

$\overset{\text{dimsatsen}}{\Longrightarrow}$ nolldim$(A) = 3 -$ rang$(A) = 3-2 = 1$

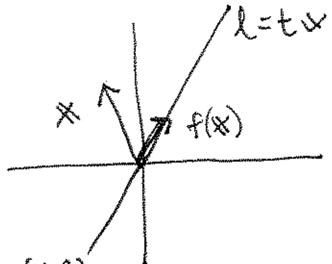
Alltså dim(Noll(A)) = 1 och alltså räcker hitta en nollskild vektor i Noll(A). Obs: $A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 0$ Alltså Noll(A) = span$((1,0,0))$

$a=1$: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Obs alla kolonner i A samma. Alltså Kolonn A = span$((1,1,1))$ och rang$(A)=1$

Noll(A) = {lösn till $A\mathbf{x}=0$} = $\{\mathbf{x}$ så att $x_1+x_2+x_3=0\}$, dvs Noll(A) är planet $\{x_1+x_2+x_3=0\}$ nolldim$(A)=2$

2a) f orto proj på $l: t\mathbf{v}$, där $\mathbf{v} = (1,2)$

Minns avb. matris $A = [f(\mathbf{e}_1)\ f(\mathbf{e}_2)]$



Minns orto proj ges av $\mathbf{x} \mapsto \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$

Alltså $f(\mathbf{e}_1) = \frac{(1,0)\cdot(1,2)}{1^2+2^2}(1,2) = \frac{1}{5}(1,2)$ $f(\mathbf{e}_2) = \frac{(0,1)\cdot(1,2)}{5}(1,2) = \frac{2}{5}(1,2)$

och $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b) f orto proj uppfyller $f \circ f \circ \dots \circ f = f$. Alltså $A^r = A$ för alla r, spec $r=2,3$.

c) Proj ej inverterbar. Alltså A ej inverterbar. Noteras t ex genom att proj ej injektiv. Bilden av $\mathbb{R}^2$ är linjen l.

d) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ omm $\mathbf{x} \in l$.

---

3) Minns: två plan parallella omm deras normalvektorer är parallella.

Nu: $\Pi_1 = P + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ där $\mathbf{u} = (4,5,6)$, $\mathbf{v} = (7,8,9)$

$\Pi_2 = \{x-2y+z=2\}$, normalvektor $\mathbf{n} = (1,-2,1)$

Π_1 & Π_2 parallella omm $\mathbf{n}$ ortogonal mot $\mathbf{u}$ & $\mathbf{v}$.

Kolla: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = (1,-2,1)\cdot(4,5,6) = 4-10+6=0$ $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = (1,-2,1)\cdot(7,8,9) = 7-16+9=0$

Alltså $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$ & $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$. Alltså Π_1 & Π_2 parallella.

4a) SANT $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$ linj ober ~~och~~ alltså bas

b) SANT spegling bevarar längd.

4c) FALSKT nolldim(koeff. matrisen) $\geq$ #kolumner − #rader $= 4-3 = 1$

d) FALSKT t ex $p(z) = z^2+1$ har reella koeff, men saknar reellt nollställe

e) SANT $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times(\mathbf{w}\times\mathbf{x}) \underset{\text{antikomm.}}{=} (-\mathbf{v}\times\mathbf{u})\times(-\mathbf{x}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{v}\times\mathbf{u})\times(\mathbf{x}\times\mathbf{w})$

f) FALSKT $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ lösb $\forall \mathbf{b} \Leftrightarrow$ kolonn $A = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow |A|\neq 0$

5a) Obs A har underdet $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 4\cdot 5 = -10 \neq 0$ $\boxed{\text{Lemma 3, s 132 Sparr}}$

Alltså rang $A = 3 \Leftrightarrow$ kolonn $A = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ lösb $\forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ A har högerinvers

b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ B inverterbar. Låt H vara en högerinvers till A. Då $I = AH = ABB^{-1}H$. Alltså har AB en högerinvers, nämligen $B^{-1}H$.

c) Obs: C har bara en linj. oberoende rad, nämligen $(1,1,1,1)$.
Obs Raden i ABC är linj. komb. av raden i C, dvs av $(1,1,1,1)$
$\Rightarrow$ Alla kolonner i ABC lika $\Rightarrow$ dessa kan ej spänna hela
$\mathbb{R}^3 = $ kolonn (I) $\therefore$ kan ej finnas H så att $ABCH = I$
(kolonner i ABCH linj. komb av kolonner i ABC).
Slutsats: ABC saknar högerinvers.

---

6) Obs $\mathrm{Vol}(T) = \left|\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{P_4P_1}\ \overrightarrow{P_4P_2}\ \overrightarrow{P_4P_3}\right|\right|$ $\mathrm{Vol}(S) = \left|\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{MP_1}\ \overrightarrow{MP_2}\ \overrightarrow{MP_3}\right|\right|$

Låt $\mathbf{v}_j = \overrightarrow{P_4P_j}$ $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_4M}$ Då $\overrightarrow{MP_j} = \overrightarrow{P_4P_j} - \overrightarrow{P_4M} = \mathbf{v}_j - \mathbf{u}$ och

$$\left|\overrightarrow{MP_1}\ \overrightarrow{MP_2}\ \overrightarrow{MP_3}\right| = \left|\mathbf{v}_1-\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}_2-\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}_3-\mathbf{u}\right| = \left|\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\right| - \left|\mathbf{u}\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\right| - \left|\mathbf{v}_1\ \mathbf{u}\ \mathbf{v}_3\right| - \left|\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{u}\right|$$

$\boxed{\text{det linjär i kolonner, } |\mathbf{v}\ \mathbf{u}\ \mathbf{u}| = 0}$

Relatera $\mathbf{u}$ till $\mathbf{v}_j$:

Minns $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_4}\right)$

Sätt $O = P_4$ Då $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_4M} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{P_4P_1}+\overrightarrow{P_4P_2}+\overrightarrow{P_4P_3}+\mathbf{0}\right) = \frac{1}{4}(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)$

Nu $\left|\mathbf{u}\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\right| = \left|\frac{1}{4}(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)\ \ \mathbf{v}_2\ \ \mathbf{v}_3\right| = \frac{1}{4}\left|\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\right|$

På samma sätt $\left|\mathbf{v}_1\ \mathbf{u}\ \mathbf{v}_3\right| = \left|\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{u}\right| = \frac{1}{4}\left|\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\right|$

Alltså $\left|\overrightarrow{MP_1}\ \overrightarrow{MP_2}\ \overrightarrow{MP_3}\right| = \left|\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\right| - 3\left(\frac{1}{4}\left|\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\right|\right) = \frac{1}{4}\left|\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\right| = \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{P_4P_1}\ \overrightarrow{P_4P_2}\ \overrightarrow{P_4P_3}\right|$

och alltså $\mathrm{Vol}(S) = \frac{1}{4}\mathrm{Vol}(T) = \frac{1}{4}\cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

---

7) Se Persson-Böiers s479

---

8) Se ant. på kurshemsidan