MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2017-12-19 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen | Telefonvakt: Felix Held
Telefon: 031-772 67 92

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

(a) Beräkna determinanterna av A och B.

(b) Låt $\mathbf{x} = (1, 1, -1, 0)$.
Avgör om $\mathbf{x}$ ligger i kolonnrummet till A, om $\mathbf{x}$ ligger i nollrummet till A samt om $\mathbf{x}$ ligger i nollrummet till B. (8 p)

2. För polynomen $p(z)$ givna nedan, lös ekvationen $p(z) = 0$ och plotta lösningarna i det komplexa talplanet; i (c) räcker det med en ungefärlig bild. I (a) och (b) ange lösningarna på formen $a + bi$, där $a, b \in \mathbb{R}$. I (c) går det bra att ange lösningarna på polär form.

(a) $p(z) = z^4 - 16$

(b) $p(z) = z^8 - 64$

(c) $p(z) = z^{2^n} - 2^{2^n}$ (6 p)

3. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 p. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (6 p)

(a) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling in planet $\Pi : x - y - 3z = 0$. Då är f injektiv.

(b) Låt A och B vara $(n \times n)$-matriser. Då gäller att om AB är inverterbar så är BA inverterbar.

(c) Den ortogonala projektionen av vektorn $(1, 2, 3)$ på planet $\Pi : x + z = 0$ är $(1, 0, 3)$.

(d) Vektorn $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$ ligger i kolonnrummet till $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(e) Låt A vara en kvadratisk matris. Då gäller att $\det(A) = \pm 1$ om och endast om A är ortogonal.

(f) Det finns oändligt många vektorer $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ så att $\mathbf{u} \times (1, 1, 0) = \mathbf{0}$ and $\mathbf{u} \times (1, 0, 1) = \mathbf{0}$.

4. Lös systemet av matrisekvationer

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases},$$

där $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(6 p)

5. Betrakta linjerna

$$\begin{aligned}
\ell_1 &: (x, y, z) = (12, 0, -1) + t_1(0, 1, 0), \qquad t_1 \in \mathbb{R} \\
\ell_2 &: (x, y, z) = (4, -5, 5) + t_2(1, -5, 3), \qquad t_2 \in \mathbb{R} \\
\ell_3 &: (x, y, z) = (-4, 1, 1) + t_3(1, 2, 3), \qquad t_3 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Bestäm vilka två av de tre linjerna som ligger närmast varandra, det vill säga mellan vilka två linjer avståndet är som minst. (6 p)

6. Låt A vara en $n \times n$-matris där alla matriselement är heltal. Antag att determinanten av A är 1. Visa att alla matriselement i A^{-1} är heltal. (6 p)

7. Låt A vara en $n \times n$-matris.

(a) Definiera vad det innebär att A är inverterbar.

(b) Visa att om A har en invers så är denna entydigt bestämd. (6 p)

8. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ och $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ vara baser för $\mathbb{R}^n$. Antag att

$$\begin{cases}
\mathbf{e}'_1 & = & s_{11}\mathbf{e}_1 + s_{21}\mathbf{e}_2 + \cdots + s_{n1}\mathbf{e}_n \\
\mathbf{e}'_2 & = & s_{12}\mathbf{e}_1 + s_{22}\mathbf{e}_2 + \cdots + s_{n2}\mathbf{e}_n \\
 & \vdots & \\
\mathbf{e}'_n & = & s_{1n}\mathbf{e}_1 + s_{2n}\mathbf{e}_2 + \cdots + s_{nn}\mathbf{e}_n
\end{cases}.$$

Antag att vektorn $\mathbf{x}$ har koordinater $x_1, x_2, \ldots, x_n$ och $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ med avseende på basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ respektive $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$, d v s

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + \cdots + x'_n\mathbf{e}'_n.$$

Härled ett samband mellan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ och $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. (6 p)

Lycka till!

Elizabeth