TMA660 Linjär algebra och geometri 19/12 17, lösningar ①

1)a) $|A| = \begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\1&1&2&2\\3&2&3&6\end{vmatrix} \; (-1)(-3) = \begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\0&1&1&0\\0&2&0&0\end{vmatrix} = (-1)^{4+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1&3&4\\1&1&2\\0&1&0\end{vmatrix} =$

Utv. rad 4   Utv. rad 3

$2\cdot(-1)^{3+2}\cdot 1\begin{vmatrix}1&4\\1&2\end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix}1&4\\1&2\end{vmatrix} = -2(2-4) = \underline{4}$

$-$ $+$

$|B| = \underline{\underline{0}}$ ty rad 3 = 2 · rad 1

b) Minns (huvudsatsen) det $A \neq 0 \Leftrightarrow$ Kolonn $A = \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow$ NM $A = \{0\}$

Alltså följer speciellt att $\underline{\underline{\mathbf{x} \in \text{Kolonn}\, A}}$, $\underline{\underline{\mathbf{x} \notin \text{NM}\, A}}$

$\mathbf{x} \in$ NM B omm $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Kolla: $B\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\2&4&6&8\\3&2&3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\2\end{bmatrix}$ Alltså $\underline{\underline{\mathbf{x} \notin \text{NM}\, B}}$

2a) $p(z)=0 \Leftrightarrow 0 = z^4-16 = (z^2-4)(z^2+4) = (z-2)(z+2)(z-2i)(z+2i)$

Lösn. $z_1 = 2$, $z_2 = -2$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 2i$

b) Ansätt $z = re^{i\theta}$, $r>0$. Då $p(z)=0 \Leftrightarrow r^8 e^{i8\theta} = 64e^0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} r^8 = (64) = 2^6 \Leftrightarrow r = 2^{6/8} = 2^{3/4} \\ 8\theta = 2\pi k \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{8}k,\ k\in\mathbb{Z} \quad k=0,\dots,7 \text{ ger olika lösn.}\end{cases}$

$z_1 = 2^{3/4}e^0 = 2^{3/4}$, $z_2 = 2^{3/4}e^{i\pi/4} = 2^{3/4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2^{1/4}(1+i)$,

$z_3 = 2^{3/4}e^{\pi/2} = 2^{3/4}i$, $z_4 = \dots = 2^{1/4}(-1+i)$, $z_5 = -2^{3/4}$, $z_6 = 2^{1/4}(-1-i)$,

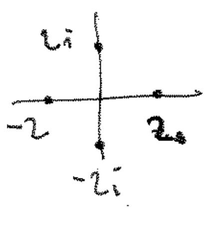
$z_7 = -2^{3/4}i$ $z_8 = 2^{1/4}(1-i)$

c) Ansätt $z = re^{i\theta}$ $r>0$ Då $p(z)=0 \Leftrightarrow r^{2^n}e^{i2^n\theta} = 2^{2^n}e^0 \Leftrightarrow$

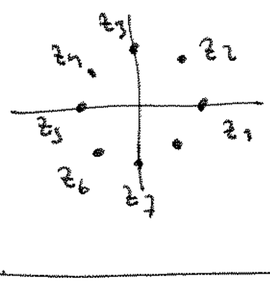
$z = 2e^{i\frac{\pi k}{2^{n-1}}}$

$\begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{2\pi k}{2^n} \end{cases}$ $k = 0, 1, \dots, 2^n-1$ ger olika lösningar

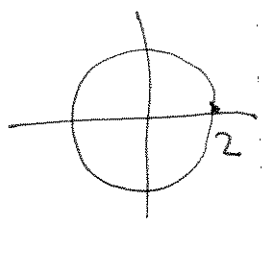
Plottar: a)



b)



c)



3 a) SANT spegling surjektiv

b) SANT BA inverterbar $\Leftrightarrow$ det BA = det $AB \neq 0 \Leftrightarrow AB$ inverterbar

c) FALSKT $(1,0,3)$ ligger inte i Π

d) SANT T ex $(1,1,0) = \frac{1}{4}\left(2(1,0,0)+(2,4,0)\right)$

e) FALSKT $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ har determinant 1, men är ej ortogonal.

f) FALSKT $\left.\begin{matrix} u \times (1,1,0) = 0 \Leftrightarrow u \parallel (1,1,0) \\ u \times (1,0,1) = 0 \Leftrightarrow u \parallel (1,0,1) \end{matrix}\right\}$ Endast 0 är parallell med både $(1,1,0)$ & $(1,0,1)$

---

4) $\begin{cases} AX+BY=C & (1) \\ DX+EY=F & (2) \end{cases}$ Obs A inverterbar med invers $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

Strategi: Lägg $-DA^{-1}\cdot$ rad 1 till rad 2: Ny (2): $(E-DA^{-1}B)Y = F-DA^{-1}C$ (2')

$$DA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E-DA^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F-DA^{-1}C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Obs: $(E-DA^{-1}B)$ inverterbar med invers $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Nu ger (2'): $Y = (E-DA^{-1}B)^{-1}(F-DA^{-1}C) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

Nu ger (1): $X = A^{-1}(C-BY) = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}}\right) =$

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 16 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

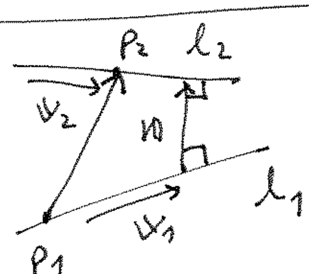
Slutsats: $\underline{\underline{X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}}$

---

5) $l_1: (x,y,z) =$ $(12,0,1)$ [redacted] $+ t_1 v_1$, $t_1 \in \mathbb{R}$ $v_1 =$ $(0,1,0)$ [redacted]

$l_2: (x,y,z) =$ $(4,-5,5)$ [redacted] $+ t_2 v_2$, $t_2 \in \mathbb{R}$ $v_2 =$ $(1,-5,3)$ [redacted]

$l_3: (x,y,z) = (4,1,1) + t_3 v_3$, $t_3 \in \mathbb{R}$ $v_3 = (1,2,3)$



Minns: För att beräkna avståndet mellan l_1 & l_2, givet att v_1 & v_2 ej parallella, tag $P_1 \in l_1$, $P_2 \in l_2$ och $n \perp v_1$ & v_2. Då avstånd$(l_1,l_2) = \left|\text{orto proj av } \overrightarrow{P_1P_2} \text{ på } n\right|$

Obs inga av v_1, v_2, v_3 är parallella.

Hitta $n \perp v_1, v_2$: $n = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = (3,0,-1)$

5) (forts.) Obs $n \cdot v_3 = 0$ så $n \perp v_3$ osv.

Tag $P_j \in l_j$, t ex genom att välja $t_j = 0 \Rightarrow P_1 = (12,0,1)$, $P_2 = (4,-5,5)$, $P_3 = (-4,1,1)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (-8,-5,6)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (-16,1,2)$, $\overrightarrow{P_2P_3} = (-8,6,-4)$

Minns: Ortogonal proj av v på n ges av $\frac{v \cdot n}{|n|^2} n$

Obs: För att avgöra mellan vilka två linjer l_i & l_j som avståndet är som minst räcker det att avgöra för vilka linjer $|\overrightarrow{P_iP_j} \cdot n|$ är som minst.

$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot n = (-8,-5,6) \cdot (3,0,-1) = -24 - 6 = -30 \quad |\overrightarrow{P_1P_2} \cdot n| = 30$

$\overrightarrow{P_1P_3} \cdot n = (-16,1,2) \cdot (3,0,-1) = -48 - 2 = -50 \quad |\overrightarrow{P_1P_3} \cdot n| = 50$

$\overrightarrow{P_2P_3} \cdot n = (-8,6,-4) \cdot (3,0,-1) = -24 + 4 = -20 \quad |\overrightarrow{P_2P_3} \cdot n| = 20$

Slutsats l_2 & l_3 ligger närmast.

---

6) Om A är inverterbar så är $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$.

Speciellt om $\det A = 1$ så är $A^{-1} = \operatorname{adj} A$.

Minns att $(\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, där D_{ij} är underdeterminanten till A där man strukit rad i, kolonn j.

Om A's matriselement är heltal så är D_{ij} heltal, och alltså är matriselementen i $A^{-1} = \operatorname{adj} A$ heltal. $\square$

---

7) Se Sparr, Kapitel 7.5 (Def 5 & Lma 2)

---

8) Se Sparr, Kapitel 7.6 (Sats 6)