1 a) Se om $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ lösbart:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\2&-1&3&-7\\2&1&1&-1\\2&-1&3&-7\end{array}\right]\begin{array}{c}-2\\ \\ \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&-3&3&-9\\0&-1&1&-3\\0&-3&3&-9\end{array}\right]\begin{array}{c}\\ \\ -3\\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&1&-3\\0&0&0&0\end{array}\right] \updownarrow \cdot(-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&-1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\begin{array}{c}(\mathrm{I})\\(\mathrm{II})\\ \\ \\ \end{array}$$ trappform

Ingen ekvation på formen $0=c$ där $c\neq 0$. Alltså $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ lösbart.
Alltså $\underline{\mathbf{b}\in \text{Kolonn}(A)}$.

b) Eftersom $\mathbf{b}\in\text{Kolonn}(A)$ så har normalekv. $A^TA\mathbf{x}=A^T\mathbf{b}$ samma lösn. som $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. För att hitta dessa lös det trappformade systemet ovan.

Sätt $x_3=s$. Då ekv (II): $x_2-s=3 \Leftrightarrow x_2=3+s$

Nu ekv (I): $x_1+(3+s)=1 \Leftrightarrow x_1=-2-s$

Alltså lösn
$$\begin{cases}x_1=-2-s\\ x_2=3+s \qquad s\in\mathbb{R}\\ x_3=s\end{cases}$$

---

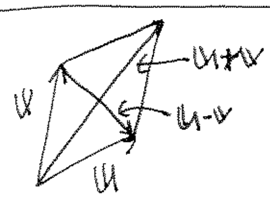
2)
$$\begin{vmatrix}1&2&2&3&3&3\\2&2&3&3&3&4\\2&3&3&3&4&4\\3&3&3&4&4&4\\3&3&4&4&4&4\\3&4&4&4&4&5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&2&2&3&3&3\\1&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0\\ \cancel{0}&\cancel{0}&1&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\0&1&0&0&0&1\end{vmatrix} = \underset{\boxed{\text{utveckla längs rad 5}}}{(-1)^{5+3}}\begin{vmatrix}1&2&3&3&3\\1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&1\end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix}0&2&3&3&2\\ \cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{1}\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&-1\\0&1&0&0&1\end{vmatrix} = \underset{\boxed{\text{utv. längs kolonn 1}}}{(-1)^{2+1}}\begin{vmatrix}2&3&3&2\\1&0&1&0\\0&1&0&-1\\1&0&0&1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}0&3&1&2\\ \cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{0}\\0&1&0&-1\\0&0&-1&1\end{vmatrix} = -\underset{\text{kolonn 1}}{(-1)^{2+1}}\begin{vmatrix}3&1&2\\1&0&-1\\0&-1&1\end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix}0&1&5\\ \cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{-1}\\0&-1&1\end{vmatrix} = \underset{\text{kolonn 1}}{(-1)^{2+1}}\underbrace{\begin{vmatrix}1&5\\-1&1\end{vmatrix}}_{1+5} = \underline{\underline{-6}}$$

---

3)



Antag att parallellogrammet P spänns av $\mathbf{u}$ & $\mathbf{v}$.
Då är diagonalerna givna av $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ & $\mathbf{u}-\mathbf{v}$.
Att diagonalerna är ortogonala är ekvivalent med att
$$\mathbf{u}+\mathbf{v}\perp\mathbf{u}-\mathbf{v} \underset{\text{def av }\perp}{\Leftrightarrow} 0=(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \underset{\text{räkneregler }\cdot\text{-prod}}{=} \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=|\mathbf{u}|^2-|\mathbf{v}|^2$$
$\Leftrightarrow |\mathbf{u}|=|\mathbf{v}|$, dvs att sidorna i P är lika långa.

---

4) a) SANT, ty $\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$ koordinater i basen $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$.

b) FALSKT, för A kvadratisk A har vänsterinvers $\Leftrightarrow$ A inverterbar.
Här är det $=0$.

c) SANT, ty rang = ordning av största nollskilda underdeterminant.

d) SANT, ty tex $p(z)=(z-1)^5(z-i)(z+i)$

e) SANT, ty $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

f) SANT, ty $0=|AB|=|A||B| \Rightarrow |A|=0$ eller $|B|=0$

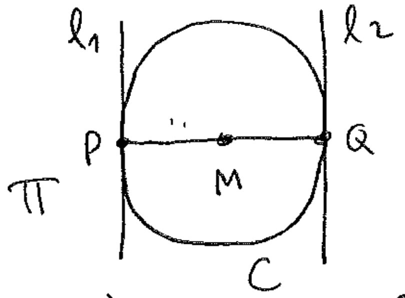
---

5) Obs: $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+2x_3 & x_2+2x_4 \\ 3x_1+4x_3 & 3x_2+4x_4 \end{bmatrix}$

Det följer att $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ Speciellt är $f(\mathbf{x})$ på formen $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Alltså är f en linjär avbildning med avbildningsmatris $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

---

6) Obs $1-1=3-3\cdot 2+3=0 \Rightarrow P, Q \in \pi$



Låt M = mittpkt på sträckan PQ

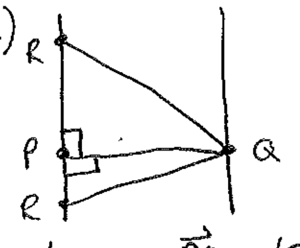
l_1 = linje i π genom P $\perp$ mot $\vec{PQ}$

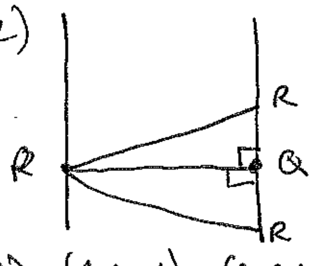
l_2 = —"— Q —"—

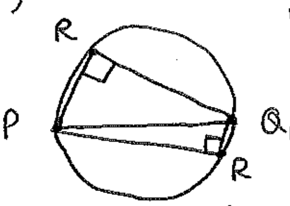
C = cirkel i π m centrum M, radie $|\vec{PM}|$

Då har vi följande möjliga placeringar för M:

1) $R \in l_1$, $R \neq P$. Då är vinkeln mellan $\vec{PQ}$ & $\vec{PR}$ rät
2) $R \in l_2$, $R \neq Q$ —"— $\vec{QP}$ & $\vec{QR}$ —"—
3) $R \in C$, $R \neq P, Q$ —"— $\vec{PR}$ & $\vec{QR}$ —"—

1) 

2) 

3) 

$|\vec{PM}| = \frac{1}{2}|\vec{PQ}| = \frac{1}{2}|(2,2,4)| = |(1,1,2)| = \sqrt{6}$

Räkna: $\vec{PQ} = (3,2,3)-(1,0,-1) = (2,2,4)$ $M = P + \frac{1}{2}\vec{PQ} = (1,0,-1)+\frac{1}{2}(2,2,4) = (2,1,1)$

Obs: $l_1, l_2 \perp \vec{PQ}$ & π's normalriktning $\mathbf{n} = (1,-3,1)$. För att få en riktningsvektor $\mathbf{v}$, betrakta $\vec{PQ} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (14,2,-8) = 2(7,1,-4)$ Låt $\mathbf{v} = (7,1,-4)$

Alternativen:

1) $R \in l_1 \setminus \{P\}$, dvs $R = P + t\mathbf{v} = (1,0,-1)+t(7,1,-4)$, $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
2) $R \in l_2 \setminus \{Q\}$, dvs $R = R + s\mathbf{v} = (3,2,3)+s(7,1,-4)$, $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
3) $R \in C \setminus \{P,Q\}$ dvs $(x,y,z) \in \pi$ som uppfyller $|(x,y,z)-M|^2 = |\vec{PM}|^2 \Leftrightarrow$ $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 6$ och $x-3y+z=0$ (och $(x,y,z) \neq P, Q$)

7a) Se spsam kap 7.2 5) Spsam kap 5 | 8) Spsam kap 4.1 + ant. på hemsidan