

Basen och koordinater

Definition

v_1, \dots, v_p bas för \mathbb{R}^n om

- v_1, \dots, v_p spänner upp \mathbb{R}^n
- v_1, \dots, v_p är linjärt oberoende

Notation: Ofta betecknas man basvektorerna e_i ;

Sats:

e_1, \dots, e_n är en bas för $\mathbb{R}^n \iff \forall u \in \mathbb{R}^n$

\exists entydigt bestämda $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ så att

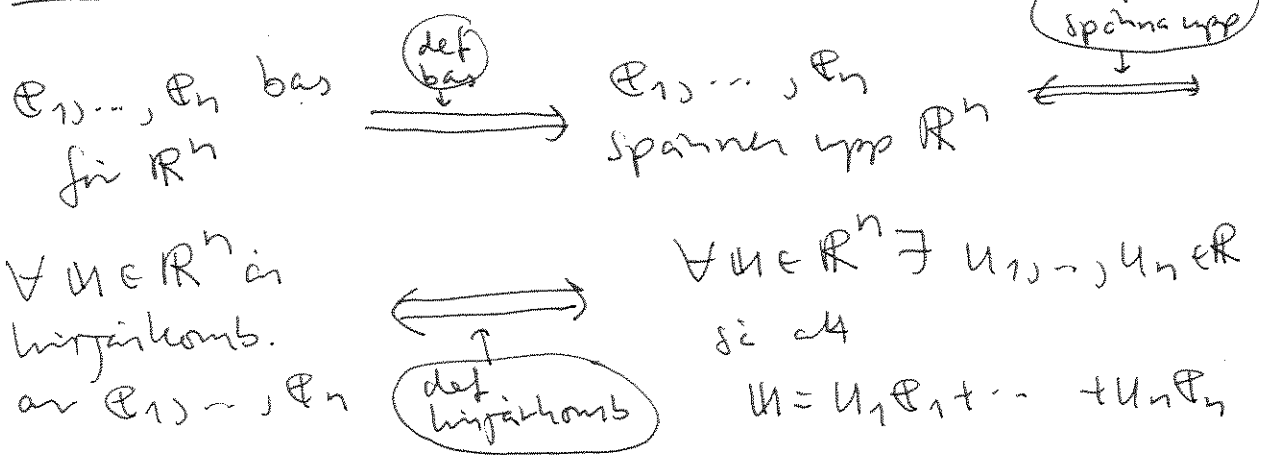
$$u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n.$$

Def u_1, \dots, u_n kallas u:s koordinater i basen e_1, \dots, e_n

Beris:

\Rightarrow :

Existens av u_1, \dots, u_n :



Entydighet av u_1, \dots, u_n :

$$\text{Antag att } u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n \quad (1)$$

$$\text{och } u = u'_1 e_1 + \dots + u'_n e_n \quad (2)$$

Tag $(1) - (2)$:

$$0 = u - u = (u_1 e_1 + \dots + u_n e_n) - (u'_1 e_1 + \dots + u'_n e_n) =$$

$$(*) \quad (u_1 - u'_1) e_1 + \dots + (u_n - u'_n) e_n$$

$$e_1, \dots, e_n \text{ bas} \xrightarrow{\text{def bas}} e_1, \dots, e_n \xrightarrow{\text{def linj. abh.}} \text{linj. abh.}$$

$$\text{värdet i } (*) \text{ är } 0, \text{ dvs } u_i - u'_i = 0 \Leftrightarrow u_i = u'_i$$

$$i = 1, \dots, n$$

Alltså är u_1, \dots, u_n entydigt bestämde.

\Leftarrow :

• Att $\exists u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ så att $u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$ för alla $u \in \mathbb{R}^n$ betyder per det att e_1, \dots, e_n spannar \mathbb{R}^n .

• Att u_1, \dots, u_n är entydigt bestämde med för

$$\text{att } 0 = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

beror man bara den triviala lös. $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

□