Baser och koordinater

Definition

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ bas för $\mathbb{R}^n$ om

- $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ spänner upp $\mathbb{R}^n$
- $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ är linjärt oberoende

Notation: Ofta betecknar man basvektorerna $\mathbf{e}_i$

Sats:

$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ är en bas för $\mathbb{R}^n \Longleftrightarrow \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$
$\exists$ entydigt bestämda $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ så att

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + \cdots + u_n\mathbf{e}_n .$$

Def $u_1, \ldots, u_n$ kallas $\mathbf{u}$s koordinater i basen $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$

Bevis:

$\Rightarrow$:

Existens av $u_1, \ldots, u_n$:

$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ bas för $\mathbb{R}^n$ $\xrightarrow{\text{def bas}}$ $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ $\xLeftrightarrow{\text{def spänna upp}}$

$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ är linjärkomb. av $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ $\xLeftrightarrow{\text{def linjärkomb}}$ $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \; \exists \, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ så att $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + \cdots + u_n\mathbf{e}_n$

16/9 18 BK:2

Entydighet av $u_1, \ldots, u_n$:

Antag att $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + \cdots + u_n\mathbf{e}_n$ (1)

och $\mathbf{u} = u_1'\mathbf{e}_1 + \cdots + u_n'\mathbf{e}_n$ (2)

Tag ekv (1) − ekv (2):

$$\mathbf{0} = \mathbf{u} - \mathbf{u} = (u_1\mathbf{e}_1 + \cdots + u_n\mathbf{e}_n) - (u_1'\mathbf{e}_1 + \cdots + u_n'\mathbf{e}_n) \overset{\text{räkneregler}}{=}$$

(*) $(u_1 - u_1')\mathbf{e}_1 + \cdots + (u_n - u_n')\mathbf{e}_n$

$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ bas för $\mathbb{R}^n$ $\xrightarrow{\text{def bas}}$ $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ linj. ober. $\xrightarrow{\text{def linj. ober.}}$

koeff i (*) är 0, dvs $u_i - u_i' = 0 \Leftrightarrow u_i = u_i'$, $i = 1, \ldots, n$

Alltså är $u_1, \ldots, u_n$ entydigt bestämda.

$\Leftarrow$:

- Att $\exists\, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ så att $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + \cdots + u_n\mathbf{e}_n$ för alla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ betyder per def att $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ spänner $\mathbb{R}^n$.
- Att $u_1, \ldots, u_n$ är entydigt bestämda med för att $\mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{e}_n$ bara kan ha den triviala lösn. $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

$\square$