Determinanten är multiplikativ

Sats Om A & B är $n \times n$-matriser, så

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Beviset använder följande egenskaper hos determinanten (behöver ej veta hur den är definierad):

1) Determinanten alternerande i rad/kolonn
2) —"— linjär —"—
3) $\det I = 1$

Bevis

Bevisplan:

1) Elementära radoperationer motsvarar multiplikation med "elementära matriser" E
$\det(EA) = \det E \cdot \det A$ om E elementär
2) Använd 1) för att visa $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

---

1) Betrakta de tre olika sortens radoperationer:

(i) Multiplikation rad i med $\lambda \neq 0$, motsvarar mult. från vänster med en matris på formen

$$E' = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

plats i)

28/9 18

dvs

$$E'A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \vdots & \\ — & \alpha_i & — \\ & \vdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ — & \lambda\alpha_i & — \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

<u>Obs</u>: • $\det E' = \lambda \cdot \det I = \lambda$

det linjär i rad i $\det I = 1$

$$\det(E'A) = \lambda \det A = \det E' \cdot \det A$$

• E' inverterbar med

$$(E')^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1/\lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

plats i (motsvarar mult. rad i m $1/\lambda$)

(ii) <u>Byt plats på rad i och k.</u>)

motsvarar mult. från vänster med en matris på formen

$$E'' = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ — & e_k & — \\ & \vdots & \\ — & e_i & — \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

plats i

plats k

dvs

$$E''A = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ — & e_k & — \\ & \vdots & \\ — & e_i & — \\ & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \vdots & \\ — & \alpha_i & — \\ & \vdots & \\ — & \alpha_k & — \\ & \vdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ — & \alpha_k & — \\ & \vdots & \\ — & \alpha_i & — \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

28/9 18

Obs: • $\det E'' = -\begin{vmatrix} & \vdots & \\ - & e_i & - \\ & \vdots & \\ - & e_k & - \\ & \vdots & \end{vmatrix} = -\det I = -1$

det alternerande i raden

$\det(E''A) = -\begin{vmatrix} & \vdots & \\ - & \alpha_i & - \\ & \vdots & \\ - & \alpha_k & - \\ & \vdots & \end{vmatrix} = -\det A = \det E'' \det A$

• E'' inverterbar med $(E'')^{-1} = E''$
(motsvarar, byt plats på rad i och k igen)

(iii) Lägg till λ gånger rad k till rad i,
motsvarar mult. från vänster med en matris på formen

$E''' = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ \lambda & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$ d v s

kolonn k rad i

$E'''A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ \lambda & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & \vdots & \\ - & \alpha_k & - \\ & \vdots & \\ - & \alpha_i & - \\ & \vdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ - & \alpha_k & - \\ & \vdots & \\ - & \alpha_i + \lambda\alpha_k & - \end{bmatrix}$

Obs: • $\det E''' = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \lambda & & 1 \end{vmatrix} \overset{(-\lambda)}{=} \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix} = \det I = 1$

konsekvens av alternerande och linjär i raden

$\det(E'''A) = \begin{vmatrix} - & \alpha_k & - \\ - & \alpha_i + \lambda\alpha_k & - \end{vmatrix} \overset{(-\lambda)}{=} \begin{vmatrix} - & \alpha_k & - \\ - & \alpha_i & - \end{vmatrix} = \det A = \det E''' \cdot \det A$

• E''' inverbar med

$$(E''')^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ -\lambda & & 1 \end{bmatrix}$$

kolumn k rad i

(motsvarar lägg $-\lambda$ gånger rad k till rad i)

Matriser av typ E', E'', E''' kallas elementära.

Vi har visat ovan att

<u>Lemma</u>

- E elementär $\Rightarrow$ E inverbar och E^{-1} elementär
- $\det(EA) = \det E \cdot \det A$ om E elementär

2) Antag först A ej inverterbar

Då
- $\det A = 0 \Rightarrow \det A \cdot \det B = 0$
- AB ej inverterbar ($f_A \circ f_B$ ej bijektiv om A ej bijektiv) $\Rightarrow \det(AB) = 0$

Alltså $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ i det här fallet.

Antag nu A är inverterbar.
Då kan vi med elementära radoperationer transformera A till I

$$[A|I] \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow [I|A^{-1}].$$

Detta innebär att det finns elementära matriser $E_1, \dots, E_s$ så att

$$E_s \cdots E_1 A = I \Leftrightarrow$$

$$A = E_1^{-1} \cdots E_s^{-1}$$

Enligt lemmat ovan är E_j inverterbara

Det följer företrädesvis ortsi eftersom A är inv bar

Upprepad användning av lemmat ger nu:

- $\det A = \det(E_1^{-1} \cdots E_s^{-1}) =$
$$\det E_1^{-1} \det(E_2^{-1} \cdots E_s^{-1}) = \dots = \det E_1^{-1} \cdots \det E_s^{-1}$$

- $\det(AB) = \det(E_1^{-1} \cdots E_s^{-1} B) =$
$$\det E_1^{-1} \det(E_2^{-1} \cdots E_s^{-1} B) = \det E_1^{-1} \cdots \det E_s^{-1} \det B$$
$$= \det A \cdot \det B$$

<u>Slutsats</u> $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ $\square$