5/10 16

Övning - linjära avbildningar

Låt P_k beteckna mängden av polynom $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ av grad högst k, dvs

$$P_k = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k, \text{ där } a_0, a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R} \}$$

1) Visa att $\{1, x, x^2, \dots, x^k\}$ är en bas för vektorrummet P_k.

2) Låt $\frac{d}{dx} : P_k \to P_k$

$$p(x) \mapsto \frac{d}{dx} p(x) = p'(x)$$

Visa att $\frac{d}{dx}$ är en linjär avbildning!

3) Bestäm avbildningsmatrisen A för $\frac{d}{dx}$ m a p basen ovan!

Vad är Noll(A)?

Kolonn(A)?

nolldim(A)?

rang(A)?

4) Avgör om $\frac{d^2}{dx^2} : P_k \to P_k$

$$p(x) \longmapsto \frac{d^2}{dx^2} p(x) = p''(x)$$

är linjär!

Bestäm i så fall avb. matris för $\frac{d^2}{dx^2}$, samt Nollrum, kolonnrum, nolldim och rang.

5/10 16

Lösning:

3) Vi har bas

$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ \dots\ ,\ e_{k+1} = x^k$$

Obs
$$\frac{d}{dx} e_1 = 0$$

$$\frac{d}{dx} e_2 = \frac{d}{dx} x = 1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0\, e_k$$

$$\frac{d}{dx} e_3 = \frac{d}{dx} x^2 = 2x = 2 e_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dx} e_k = \frac{d}{dx} x^k = k x^{k-1} = k\, e_{k-1}$$

Alltså är avbildn. matrisen map $\{e_j\}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & 0 & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Null}(A) = \{p \in P_k \text{ så att } \frac{d}{dx} p = 0\} = \{p \text{ konstant}\} = \{p = a_0\}$$

Om repr. p i basen $\{1, x, \dots, x^k\}$, kan vektorer skrivas p m vektorn $(a_0, a_1, \dots, a_k)$

$$\text{Null}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ | & 0 & 2 & \\ | & | & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & k \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \{(a_0, 0, \dots, 0)\}$$

nolldim$(A) = 1$

$$\text{Kolum}(A) = \text{span}(1, x, \dots, x^{k-1}) = \text{poly of grad} \leq k-1$$

rang$(A) = k$.

4) <u>Obs</u> $\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \circ \frac{d}{dx}$

Sammansättning av linjära avbildn.

Matrisen för $\frac{d^2}{dx^2}$ ges av

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & k \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & k \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 6 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & (k-1)k \\ & 0 & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$