19/9 16

Ortogonal projektion

1. Ortogonal projektion på vektor / linje
2. Ortogonal projektion på plan

(Extra övningar ej i kursen   3. dim n: Ortogonal projektion på underrum)

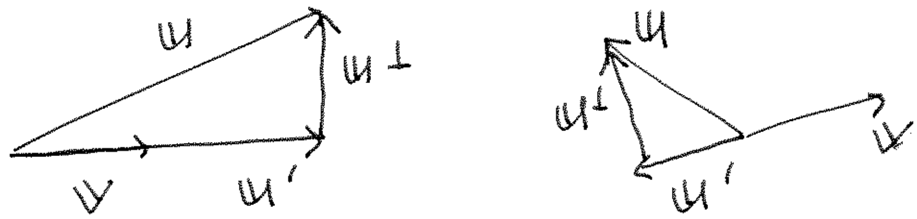
---

1. Ortogonal projektion på vektor / linje

Sats: Antag att $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
Då gäller att varje vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ har en unik uppdelning

$$(*) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^\perp$$

där $\mathbf{u}'$ är parallell med $\mathbf{v}$
$\mathbf{u}^\perp$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$.



Vidare är

$$(**) \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\, \mathbf{v}.$$

Def: $\mathbf{u}'$ kallas den <u>ortogonala projektionen</u> av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$.

Bevis:

Bevisgång:

1) Visa att $\mathbf{u}'$ definierad enligt (**) är parallell med $\mathbf{v}$.

2) Visa att $\mathbf{u}-\mathbf{u}'$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$.

1) & 2) $\Rightarrow$ Det finns åtminstone en uppdelning (*). Nämligen tag $\mathbf{u}'$ def av (**) och $\mathbf{u}^\perp = \mathbf{u}-\mathbf{u}'$.

3) Visa att denna uppdelning är unik.

---

1) $$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$$ obs, detta är en skalär. Alltså klart att $\mathbf{u}'$ parallell med $\mathbf{v}$.

2) $$(\mathbf{u}-\mathbf{u}')\cdot\mathbf{v} \underset{\text{skalärprod distributiv}}{=} \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v} \underset{\boxed{\mathbf{u}' \text{ def enligt } (**)}}{=}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\underbrace{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}_{|\mathbf{v}|^2} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$$

Alltså är $\mathbf{u}-\mathbf{u}'$ ortogonal mot $\mathbf{v}$.

3) Antag att vi har två uppdelningar

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^\perp \quad (1)$$
$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}' + \tilde{\mathbf{u}}^\perp \quad (2)$$

där $\mathbf{u}'$ & $\tilde{\mathbf{u}}'$ parallella med $\mathbf{v}$

$\mathbf{u}^\perp$ & $\tilde{\mathbf{u}}^\perp$ ortogonala mot $\mathbf{v}$.

19/9 16

Tag ekv (1) - ekv (2):

$$\mathbb{0} = \mathbb{u} - \mathbb{u} = \mathbb{u}' + \mathbb{u}^\perp - (\tilde{\mathbb{u}}' + \tilde{\mathbb{u}}^\perp) = \mathbb{u}' + \mathbb{u}^\perp - \tilde{\mathbb{u}}' - \tilde{\mathbb{u}}^\perp$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\mathbb{u}' - \tilde{\mathbb{u}}'}_{\text{parallell med } \mathbb{v}} = \underbrace{\tilde{\mathbb{u}}^\perp - \mathbb{u}^\perp}_{\text{ortogonal mot } \mathbb{v}}$$

[**Lemma**: Antag $\mathbb{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{v} \neq \mathbb{0}$.
Antag $\mathbb{u} \in \mathbb{R}^n$ är parallell med $\mathbb{v}$ och ortogonal mot $\mathbb{v}$. Då $\mathbb{u} = \mathbb{0}$.]

Bevis lemma: Obs att $\mathbb{u}$ är parallell med $\mathbb{v}$ betyder att $\mathbb{u} = \lambda \mathbb{v}$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$.
Nu

$$|\mathbb{u}|^2 = \mathbb{u} \bullet \mathbb{u} \overset{\mathbb{u} = \lambda \mathbb{v}}{=} \mathbb{u} \bullet (\lambda \mathbb{v}) \overset{\text{räkneregler}}{=} \lambda (\mathbb{u} \bullet \mathbb{v}) \overset{\mathbb{u} \perp \mathbb{v}}{=} \lambda \cdot 0 = 0$$

Alltså $|\mathbb{u}| = 0$ och den enda vektor som har längd 0 är $\mathbb{0}$. Alltså $\mathbb{u} = \mathbb{0}$. $\square$

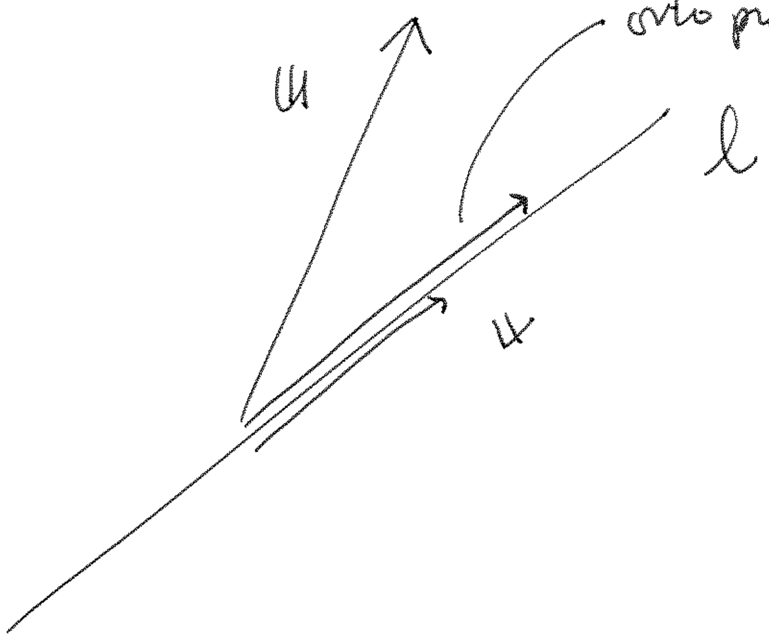
Det följer från lemmat att $\mathbb{u}' - \tilde{\mathbb{u}}' = \tilde{\mathbb{u}}^\perp - \mathbb{u}^\perp = \mathbb{0}$ eftersom $\mathbb{u}' - \tilde{\mathbb{u}}' = \tilde{\mathbb{u}}^\perp - \mathbb{u}^\perp$ både är parallell med och ortogonal mot $\mathbb{v}$.

Alltså $\mathbb{u}' = \tilde{\mathbb{u}}'$ och $\tilde{\mathbb{u}}^\perp = \mathbb{u}^\perp$.

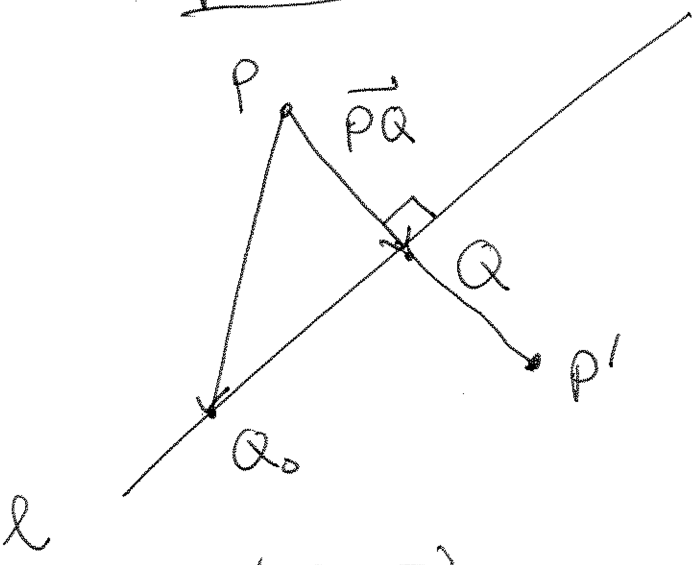
Alltså är uppdelningen (*) unik. $\square$

Den <u>ortogonala projektion av vektorn $\mathbb{u}$ på linjen l</u>: $P+t\mathbb{v}$

definieras som den ortogonala projektionen av $\mathbb{u}$ på $\mathbb{v}$.



Givet en linje l och en punkt P, finns en unik punkt $Q \in l$ så att vektorn $\overrightarrow{PQ}$ är ortogonal mot l. Q kallas den <u>ortogonala projektionen av P på l.</u>



Hitta $\overrightarrow{PQ}$: Välj $Q_0 \in l$ godtyckligt. Då är $\overrightarrow{QQ_0}$ den ortogonala projektionen av $\overrightarrow{PQ_0}$ på l, och

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ_0} - \overrightarrow{QQ_0}.$$

Vidare är $Q = P + \overrightarrow{PQ}$.

$P' = P + 2\overrightarrow{PQ}$ kallas <u>speglingen</u> av Q i l

19/9 16

2. Ortogonal projektion på plan

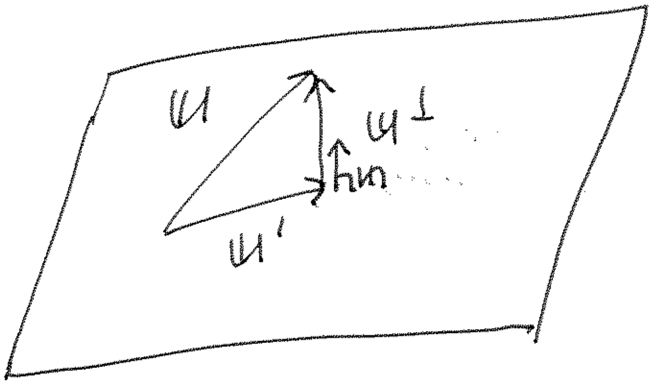
Sats: Givet ett plan Π och en vektor $\mathbf{u}$ i rummet, finns en unik uppdelning

(*) $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^\perp$

där $\mathbf{u}'$ parallell med Π

$\mathbf{u}^\perp$ ortogonal mot Π

Vidare ges $\mathbf{u}^\perp$ som den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{n}$, där $\mathbf{n}$ är en normalvektor till Π.



Def: $\mathbf{u}'$ kallas den <u>ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på Π</u>.

<u>Bevisskiss:</u>

Obs först att $\mathbf{u}^\perp \perp \Pi$ eftersom $\mathbf{u}^\perp$ parallell med $\mathbf{n}$.

Kolla att $\mathbf{u} - \mathbf{u}^\perp$ parallell med Π:

$$(\mathbf{u}-\mathbf{u}^\perp)\cdot\mathbf{n} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - \underbrace{\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}}_{\text{orto proj av } \mathbf{u} \text{ på } \mathbf{n}}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0$$

Alltså är $u - u^{\perp}$ ortogonal mot n,
dvs parallell med Π.

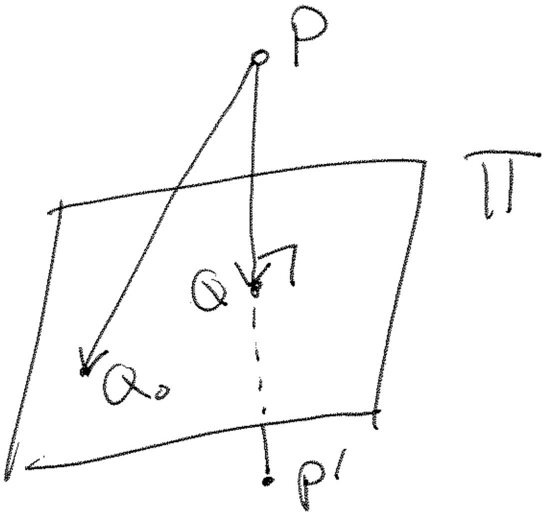
Alltså finns åtminstone en uppdelning (*).

Nämligen $u^{\perp}$ som orto proj av på n
och u' som $u - u^{\perp}$.

Entydighet av uppdelningen visas på samma sätt som för orto proj på en vektor.

$\square$

Den <u>ortogonala projektionen</u> av en punkt P på planet Π definieras på samma sätt som orto projektion av P på l: Det finns en unik punkt $Q \in \Pi$ så att $\overrightarrow{PQ}$ är ortogonal mot Π.



För att hitta Q, tag $Q_0 \in \Pi$ godtyckligt.
Då är $\overrightarrow{QQ_0}$ den ortogonala projektionen av $\overrightarrow{PQ_0}$ på Π.

$P' = P + 2\overrightarrow{PQ}$ kallas <u>speglingen</u> av P i Π.

3. dim n men allmänt har vi:

Sats Låt V vara ett plan av dimension k genom origo i $\mathbb{R}^n$, d v s $V = \text{span}(\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k)$ där $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k$ linjärt oberoende vektorer.

Då gäller att varje $\mathbb{u} \in \mathbb{R}^n$ har en unik uppdelning

$$\mathbb{u} = \mathbb{u}' + \mathbb{u}^\perp,$$

där $\mathbb{u}'$ är parallell med V och $\mathbb{u}^\perp$ är ortogonal mot V, dvs $\mathbb{u}^\perp \perp \mathbb{v}_j$ för $j = 1, \ldots, k$

Def: $\mathbb{u}'$ kallas den ortogonala projektionen av $\mathbb{u}$ på V.

Bestämma $\mathbb{u}'$:

Lemma: Vi kan hitta en bas $\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n$ för $\mathbb{R}^n$ så att ~~[illegible]~~ $\mathbb{e}_j \perp \mathbb{e}_l$ för $j \neq l$ och $V = \text{span}(\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_k)$.

Låt $\text{proj}_V(\mathbb{u})$ beteckna den orto proj av $\mathbb{u}$ på V.

Bevisskiss lemma:

Kan utvidga $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ med vektorer $\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ så att $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ bas för $\mathbb{R}^n$.

Låt nu

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathrm{proj}_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{v}_2)$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{v}_3 - \mathrm{proj}_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{v}_3) - \mathrm{proj}_{\mathbf{e}_2}(\mathbf{v}_3)$$

$$\vdots$$

Kolla att detta val av $\mathbf{e}_j$ uppfyller $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_\ell = 0$ för $j \neq \ell$. och att $\mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = V$

$\square$

Nu ges $\mathbf{u}'$ som $\mathbf{u}' = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{proj}_{\mathbf{e}_j}(\mathbf{u})$ . .