TMA 660 Linjär algebra och geometri 3/1 2015 Lösningar

1) Gausseliminering ger

$$A=\begin{bmatrix}1&3&4&-1&2\\2&6&6&0&-3\\3&9&3&6&-3\\3&9&0&9&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&4&-1&2\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=T\quad\begin{array}{l}(I)\\(II)\\(III)\\ \\ \end{array}$$

pivot

Minns: en bas för Kolonn(A) ges av de kolonner i A vars motsvarande kolonner i T innehåller pivotelement, d v s kolonn 1, 3, 5 i A

Minns Noll $(A)=$ Noll $(T)=\{\mathbb{x}$ så att $T\mathbb{x}=\mathbb{0}\}$

För att lösa $T\mathbb{x}=\mathbb{0}$ sätt $x_2=t_1$, $x_4=t_2$

Nu ger rad (III) i T : $x_5=0$

(II) : $x_3-x_4+x_5=0 \Rightarrow x_3=t_2$

(I) : $x_1=-3x_2-4x_3+x_4-2x_5=$
$-3t_1-4t_2+t_2=-3t_1-3t_2$

Alltså har $A\mathbb{x}=\mathbb{0}\Leftrightarrow T\mathbb{x}=\mathbb{0}$ lösningarna:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=t_1\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}-3\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

Slutsats
- En bas för Kolonn(A) är $\{(1,2,3,3),(4,6,3,0),(2,-3,-3,0)\}$
- rang(A) = dim (Kolonn (A)) = 3
- En bas för Noll(A) är $\{(-3,1,0,0,0),(-3,0,1,1,0)\}$
- nolldim (A) = dim (Noll (A)) = 2

---

2) a) $p(z)$ har grad 8. Då ger algebrans fundamentalsats att $p(z)$ har 8 komplexa nollställen (räknat med multiplicitet)

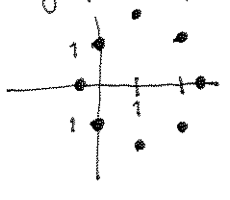
b) Lös $p(z)=0$!
Sätt $z-1=re^{i\theta}$ $r>0$ Då $p(z)=(z-1)^8-16=(re^{i\theta})^8-16=r^8e^{i8\theta}-16$
De Moivre

Alltså $p(z)=0\Leftrightarrow r^8e^{i8\theta}=16$

Lösn ges av: $\begin{cases} r^8=16,\ r\geq 0 \Leftrightarrow r=\sqrt{2}\\ 8\theta=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta=\frac{2\pi k}{8} \quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Genom att variera k får vi 8 olika lösningar: $k=0,1,\dots,7$ ger

$$re^{i\theta}=\begin{cases}\sqrt{2}e^{i0}=\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\,e^{i\frac{2\pi}{8}}=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}=1+i\\ \sqrt{2}\,e^{i4\pi/8}=\sqrt{2}\,e^{i\pi/2}=\sqrt{2}\,i\\ \sqrt{2}\,e^{i3\pi/4}=-1+i\\ \sqrt{2}\,e^{i4\pi/4}=\sqrt{2}\,e^{\pi}=-\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\,e^{i5\pi/4}=-1-i\\ \sqrt{2}\,e^{i6\pi/4}=-\sqrt{2}\,i\\ \sqrt{2}\,e^{i7\pi/4}=1-i\end{cases}\Leftrightarrow z=\begin{cases}1+\sqrt{2}\\ 2+i\\ 1+\sqrt{2}\,i\\ i\\ 1-\sqrt{2}\\ -i\\ 1-\sqrt{2}\,i\\ \\ 2-i\end{cases}$$



c) $p(z)$ har 2 reella nollställen

3a) Volymen av P ges av absolutbeloppet av

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Sarrus}}}{=} 8+1+1-2-2-2 = 4$$

<u>Slutsats</u> Volymen av P är $\underline{\underline{4}}$

b) <u>Minns</u>: Volymförändringen under den linjära avb. $f_A: \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ är absolutbeloppet av $|A|$.

Nu
$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{utv. längs} \\ \text{kolonn 2}}}{=} -3 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = -3(-7+10) = -9$$

<u>Slutsats</u> $\mathrm{Vol}(f_A(P)) = ||A|| \cdot \mathrm{Vol}(P) = 9 \cdot 4 = \underline{\underline{36}}$

c) $g: \mathbf{x} \mapsto 4\mathbf{x}$ har avbildningsmatrisen $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ med $\det 4^3 = 64$

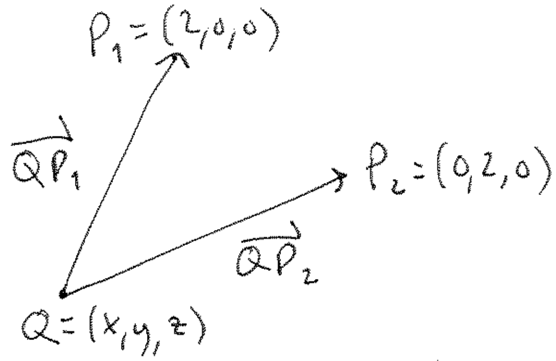
(Allmänt: vid skalning med en faktor k i dimension n ändras (den n-dim) volymen med en faktor $|k|^n$)

<u>Slutsats</u>: $\mathrm{Vol}(g(P)) = 64 \cdot \mathrm{Vol}(P) = 64 \cdot 4 = \underline{\underline{256}}$

d) Spegling bevarar volym.
<u>Slutsats</u> $\mathrm{Vol}(h(P)) = \mathrm{Vol}(P) = \underline{\underline{4}}$

---

4)



- Minns: avståndet mellan P_i och Q ges av $|\overrightarrow{QP_i}|$
- Antag $Q = (x,y,z)$

- Då $\overrightarrow{QP_1} = (2-x, -y, -z) \Rightarrow |\overrightarrow{QP_1}|^2 = (x-2)^2 + y^2 + z^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2$

$\overrightarrow{QP_2} = (-x, 2-y, -z) \Rightarrow |\overrightarrow{QP_2}|^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2$

Alltså
$$|\overrightarrow{QP_1}| = |\overrightarrow{QP_2}| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ty } |QP_i| \geq 0}}{\Leftrightarrow} |\overrightarrow{QP_1}|^2 = |\overrightarrow{QP_2}|^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2$$

$$\Leftrightarrow -4x = -4y \Leftrightarrow x - y = 0$$

<u>Slutsats</u> Avståndet mellan Q & P_1 är lika med avståndet mellan Q & P_2 om och endast om Q ligger i planet $x - y = 0$

TMA 660 8/1 15

5) a) SANT [ty $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&1\end{vmatrix} \neq 0$]

b) SANT ["Huvudsatsen" i Sparr säger bl a detta]

c) FALSKT [Tag t ex $A=B=I$ Då $\text{rang}(AB)=\text{rang}(A)=\text{rang}(B)$]

d) SANT [$A\mathbf{x}=\mathbf{x} \Leftrightarrow (A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$ har alltid minst en lösning]

e) FALSKT [ $x+y+1=0$ $\mathbf{0}$ speglas i punkten $(-1,-1)$, ej linjärt]

f) SANT [A^TA har två likadana kolonner]

g) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ t ex

h) $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $[-1]$ t ex

---

6) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(1,1,1) \mapsto (0,0,0)$
$(1,-1,0) \mapsto (1,-1,0)$
$(1,0,-1) \mapsto (1,0,-1)$

Avbildningsmatrisen A till f uppfyller alltså

$$A\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix}0&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}}_{C}$$

Gausseliminering ger:

$$[B \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\1&0&-1&0&0&1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/3&1/3&1/3\\0&1&0&1/3&-2/3&1/3\\0&0&1&1/3&1/3&-2/3\end{array}\right] = [I \mid B^{-1}]$$

Alltså är $A = CB^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$

$\mathbf{x}$ avbildas på sig självt om $A\mathbf{x}=\mathbf{x} \Leftrightarrow (A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0} \Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\mathbf{0} \Leftrightarrow x_1+x_2+x_3=0$$

Slutsats: $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$, f avbildar $\mathbf{x}$ på sig självt om $\mathbf{x}$ ligger i planet Π: $x_1+x_2+x_3=0$, f avbildar $\mathbf{x}$ som är ortogonalt mot Π på $\mathbf{0}$, eftersom $(1,1,1)$ är en normalvektor till Π. Alltså är f ortogonal projektion på planet $\Pi=\{x_1+x_2+x_3=0\}$.

---

7 a) Se Sparr kap 5.2 b) Se Sparr kap 5.3

c) $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}||\sin\theta|$, där θ minsta vinkel mellan $\mathbf{u}$ & $\mathbf{v}$

Eftersom $0 \le |\sin\theta| \le 1$ så är $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$

Likhet råder då $|\sin\theta| = 1 \Leftrightarrow \theta = \pi/2$ (ty minsta vinkel) $\Leftrightarrow \mathbf{u}\perp\mathbf{v}$

d) Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vara en HON-bas. Då $(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$, men $\mathbf{e}_1\times(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1\times\mathbf{0} = \mathbf{0}$

8) Se Sparr kap 8.2