TMA 660 Linjär algebra och geometri 17/8 15 lösningar (1)

1a)
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 6 & 2 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \boxed{-2} \\ \\ \boxed{1} \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 6 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

utveckla längs kolonn 4   Sarrus regel

$$-1(-60+54) = \underline{6}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 7 & 6 & 2 \\ 6 & 4 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ -6 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}}$$ eftersom rad 1 och rad 4 är lika.

b) uppg a) $\Rightarrow |A|=0 \Rightarrow$ kolonnerna i A linj beroende
$\Rightarrow$ rang$(A) \leq 4$

Obs: · Den första determinanten i a) är underdeterminanten D_{42} till A.
· $D_{42} \neq 0 \Rightarrow$ kolonn 1, 3, 4, 5 i A är linjärt oberoende
$\Rightarrow$ rang$(A) \geq 4$

Slutsats: · rang(A) = 4
· {kolonn 1, 3, 4, 5 i A}, d.v.s $\{(2,4,6,2,-6), (5,7,-2,5,7), (4,6,-4,4,7), (1,2,0,1,0)\}$ är en bas för kolonn(A).
· nolldim(A) = # kolonner − rang(A) = 5 − 4 = 1

---

2 a) Obs $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$ så A, B är inverterbara och därför:
$$AXB = C \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$
Beräkna A^{-1}, B^{-1}!
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$[B|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \boxed{-1} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \boxed{-1} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
Alltså $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och
$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}}}$$

2b) Obs; B som ovan, men A ej inverbar.
Alltså undersök antal lösningar till $AX=CB^{-1}$;

$$\begin{bmatrix} x_1+x_4 & x_2+x_5 & x_3+x_6 \\ x_1+x_4 & x_2+x_5 & x_3+x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} = AX = CB^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

Detta är ett ekvationssystem med en ekvation för varje matriselement.
Obs att lösning saknas, ty, t ex, $x_1+x_4=3$ och $x_1+x_4=4$ kan ej gälla samtidigt.
Slutsats: Matrisekv. $AXB=C$ saknar lösning

---

3) Låt $p(z) = z^4+(3+3i)z^3+(4+4i)z^2+(12+12i)z+16i=0$
Givet: $p(z)$ har minst ett rent imaginärt nollställe.
Ansätt $z=ai$

Då $p(z) = a^4+(3+3i)(-a^3i)+(4+4i)(-a^2)+(12+12i)ai+16i =$
$a^4-3a^3i+3a^3-4a^2-4a^2i+12ai-12a+16i$

$\mathrm{Re}\, p(z) = a^4+3a^3-4a^2-12a \quad \mathrm{Im}\, p(z) = -3a^3-4a^2+12a+16$

Obs Om $z=ai$ skall uppfylla $p(z)=0$, måste a uppfylla $0=\mathrm{Re}\,p(z)+\mathrm{Im}\,p(z) = a^4-8a^2+16 = (a^2-4)^2=0$
$\Leftrightarrow a=\pm 2$.

Insättning av $z=\pm 2i$ ger att $z=\pm 2i$ är lösningar till $p(z)=0$. Alltså innehåller $p(z)$ en faktor $(z-2i)(z+2i)$"

Polynomdivision ger $p(z)=(z^2+4)(z^2+(3+3i)z+4i)$

Lös: $z^2+(3+3i)z+4i=0 \overset{(***)}{\Leftrightarrow}$ ← kvadratkompl.

$$\underbrace{\left(z+\frac{3+3i}{2}\right)}_{=\tilde{z}}{}^2 = \left(\frac{3+3i}{2}\right)^2-4i = \frac{9}{2}i-4i = \frac{1}{2}i$$

Ansätt $\tilde{z}=x+iy$ Då $(***) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=0 & (\mathrm{I}) \text{ (Realdelar)} \\ 2xy=\frac{1}{2} & (\mathrm{II}) \text{ (Im-delar)} \end{cases}$

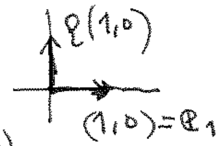
$(\mathrm{I}) \Rightarrow x=\pm y \quad (\mathrm{II}) \Rightarrow x$ & y har samma tecken, $x=y=\pm\frac{1}{2}$

Alltså $\tilde{z}=\pm\frac{1}{2}(1+i) \Leftrightarrow z=-1-i$, $z=-2-2i$

Slutsats: $p(z)$ har lösningarna $z=\pm 2i$, $z=-1-i$, $z=-2-2i$

4a) Bestäm först avbildningsmatrisen A_f för f.

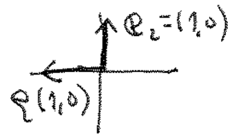
$$A_f = \begin{bmatrix} | & | & | \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



ty $f(e_1) = f(1,0,0) = (\rho(1,0),0) = (0,1,0)$

$f(e_2) = (\rho(0,1),0) = (-1,0,0)$

$f(e_3) = (\rho(0,0),1) = (0,0,1)$



Avbildningsmatrisen för g fås på samma sätt:

$$A_g = \begin{bmatrix} | & | & | \\ g(e_1) & g(e_2) & g(e_3) \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Minns att avbildningsmatrisen till $f \circ g$ är

$$\underline{\underline{A_{f\circ g}}} = A_f A_g = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}}$$

b) Bestäm $X = (x,y,z)$ så att $AX = X \Leftrightarrow (I-A)X = 0 \;(*)$

Obs $I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Alltså $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Slutsats: De punkter som avbildas på sig själva är linjen $t(1,1,1)$.

c) Matrisen för $g \circ f$ är

$$A_{g\circ f} = A_g A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq A_{f\circ g}$$

Alltså $g \circ f \neq f \circ g$

---

5 a) Tag t ex $P = (2,-1,1)$. Obs $3 \cdot 2 + (-1) - 4 \cdot 1 = 1$

Alltså $P \in \{3x + y - 4z = 1\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \| $$

b) Tag vilken (3×3)-matris A som helst med $|A| = 0$, t ex $A = \mathbb{O}$.

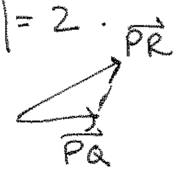
c) Tag t ex $v = (2,-1,0)$. Då $v \cdot (1,2,3) = 0$. Alltså v orto mot $(1,2,3)$.

d) Tag vilken som helst $(m \times n)$-matris med rang $n-1$, t ex $[1 \;\; 0]$.

e) Tag t ex $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \mapsto (x^2, 0)$.

5f) Tag $f: \mathbb{x} \mapsto A\mathbb{x}$ där A är en $(2,2)$-matris som är inverterbar, t ex $A = I = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$. Då $f: \mathbb{x} \mapsto \mathbb{x}$.

g) Tag $\vec{PQ}$ & $\vec{PR}$ så att $|\vec{PQ}\ \vec{PR}| = 2$.
Då är arean av triangeln 1.



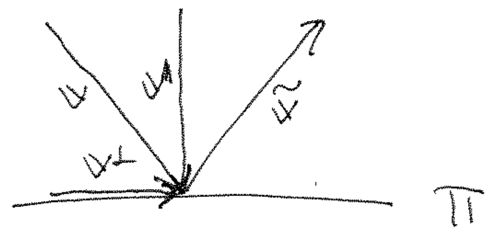
Tag t ex $\vec{PQ} = (2,0)$, $\vec{PR} = (0,1)$

Kan då välja $\underline{P = (0,0),\ Q = (2,0),\ R = (0,1)}$

---

6) Låt $\mathbb{v}$ vara den infallande strålens riktningsvektor med längd 1, d v s $\mathbb{v} = (1,0,0)$, och låt $\tilde{\mathbb{v}}$ vara den utgående strålningens riktningsvektor med längd 1, d v s $\tilde{\mathbb{v}} = \frac{1}{3}(1,-2,-2)$.

Låt $\mathbb{v}^{\perp}$ vara ortogonal proj av $\mathbb{v}$ på Π och låt $\mathbb{v}' = \mathbb{v} - \mathbb{v}^{\perp}$.



<u>Obs</u>: $2\mathbb{v}' = \mathbb{v} - \tilde{\mathbb{v}} =$

$(1,0,0) - \frac{1}{3}(1,-2,-2) = \frac{1}{3}(2,2,2)$.

Som normalvektor till Π kan vi därför välja vilken som helst $\mathbb{n} \neq \mathbb{0}$ som är parallell med $\frac{1}{3}(2,2,2)$, t ex $\mathbb{n} = (1,1,1)$.

Alltså är Π på formen $x+y+z=d$

Punkten $P = (3,-5,7)$ som ligger i Π bestämmer d:

$P \in \Pi \Rightarrow 3-5+7 = d \Leftrightarrow d = 5$

<u>Slutsats</u>: Π bestäms av ekvationen $x+y+z=5$.

---

7) Se Sparr kap 6.2 (Def 3 & Sats 2)

---

8) Se Sparr kap 7.5 (Lemma 3) beviset av Lemma 4)