MATEMATIK **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2015-10-26 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen Telefonvakt: Elizabeth Wulcan
Telefon: 0703-088304

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 p (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Låt $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Beräkna $\det(A)$ och $\det(B)$.

(b) Låt $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Hur många lösningar har matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ respektive $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$? (6 p)

2. Låt T vara tetraedern med hörn $P_1 = (1,1,1)$, $P_2 = (1,0,0)$, $P_3 = (2,3,0)$ och $P_4 = (4,5,6)$.

(a) Bestäm volymen av T.

Minns: Volymen av en kon (speciellt en tetraeder) med basarea B och höjd h är $\frac{1}{3} \cdot B \cdot h$.

(b) Betrakta triangeln τ med hörn i P_1, P_2, P_3 som tetraederns bas. Vad är då motsvarande höjd?

(c) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling i planet $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Vad är volymen av $f(T)$? Vad är $f(T)$'s höjd (med avseende på basen $f(\tau)$)?

(d) Låt $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara skalning med en faktor 2. Vad är volymen av $g(T)$? Vad är $g(T)$'s höjd (med avseende på basen $g(\tau)$)? (8 p)

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm mängden av matriser X som *kommuterar* med A, det vill säga lös matrisekvationen

$$XA = AX.$$

Kommentar: Mängden av sådana matriser kallas *centralisatorn* till A.

(b) Bestäm mängden av matriser X som *antikommuterar* med A, det vill säga lös matrisekvationen

$$XA = -AX.$$

(c) Finns det någon matris förutom nollmatrisen $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ som både kommuterar och antikommuterar med A? Motivera ditt svar. Om svaret är ja räcker det att ange ett exempel.

(d) Finns det någon matris som varken kommuterar eller antikommuterar med A? Motivera ditt svar. Om svaret är ja räcker det att ange ett exempel. (8 p)

4. Betrakta avbildningen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{u} \times (1, 2, 3). \end{aligned}$$

(a) Visa att f är linjär.

(b) Låt A vara f's avbildningsmatris. Bestäm A's nollrum, kolonnrum, nolldimension och rang. (6 p)

5. Antag att $p(z)$ är ett polynom av grad 9 med reella koefficienter. Antag att $p(1 + i) = 0$ samt att p har åtminstone ett rent imaginärt nollställe (det vill säga på formen $ai, a \in \mathbb{R}$). Hur många reella nollställen kan p ha som mest? Hur många reella nollställen kan p ha som minst? (4 p)

6. Minns att en $(n \times n)$-matris A med matriselement a_{ij} är *uppåt triangulär* om $a_{ij} = 0$ för $i > j$, det vill säga om A är på formen $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Antag att A är en uppåt triangulär och inverterbar $(n \times n)$-matris. Visa att A^{-1} är uppåt triangulär. (6 p)

Tips: Om du inte vet hur du skall göra detta i allmänhet kan det vara en bra idé att börja med att visa påståendet för små matriser. Ett bevis för att påståendet gäller för $n = 2$ ger 2 poäng. Ett bevis för att påståendet gäller för $n = 2$ och $n = 3$ ger 3 poäng.

7. Visa att ekvationen

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

har endast den triviala lösningen $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$ om och endast om ingen av vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ är en linjärkombination av de andra. (6 p)

8. (a) Låt $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$. Givet $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, låt

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}, \quad \mathbf{u}^\perp = \mathbf{u} - \mathbf{u}'.$$

Visa att $\mathbf{u}^\perp$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$.

(b) Använd detta för att visa att varje vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ har en entydig uppdelning

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^\perp,$$

där $\mathbf{u}'$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}^\perp$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$. (6 p)

Lycka till!

Elizabeth