TMA 660 Linjär algebra och geometri 26/10 15 lösn. 1

1 a) $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}}$ eftersom rad 1 & rad 3 lika

$|B| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{\boxed{-2}\ \boxed{-1}\ \boxed{-3}}{=} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{utveckla längs kolonn 4}}{=}$

$1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & 0 \\ -4 & -4 & -2 \end{vmatrix} \underset{\text{mult alla rader m } -1}{=} (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{utv. längs rad 2}}{=} 6(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$

$6(6-4) = 6 \cdot 2 = \underline{\underline{12}}$

b) Låt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ vara A's kolonner, dvs $A = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$

Obs att $B = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{b} & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$

$|B| \neq 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{b}, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ linj ober $\Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linj ober

$\Downarrow$ B inverterbar $\quad \Rightarrow \mathbf{b} \notin \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$

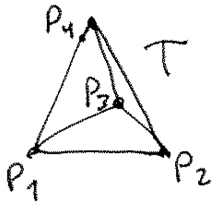
$|A| = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ linj ber. Eftersom $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linj ober

så är där $\operatorname{Kolonn}(A) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \not\ni \mathbf{b}$

Alltså saknar $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösning.

$B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en lösning, nämligen $\mathbf{x} = B^{-1}\mathbf{b}$.

2a)



Volymen av T är absolutbeloppet av

$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} | & | & | \\ \overrightarrow{P_2P_1} & \overrightarrow{P_2P_3} & \overrightarrow{P_2P_4} \\ | & | & | \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \frac{5-6-9}{6} = \frac{-10}{6}$

Slutsats Volymen av T är $\underline{\underline{\frac{5}{3}}}$

b) Metod 1: Använd $\operatorname{Vol}(T) = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h^{(*)}$. Minns $B = \left| \frac{1}{2} \overrightarrow{P_2P_1} \times \overrightarrow{P_2P_3} \right|$

Sarrus: $\overrightarrow{P_2P_1} \times \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-3, 1, -1) \Rightarrow B = \frac{1}{2}\sqrt{9+1+1} = \frac{1}{2}\sqrt{11}$

(*) ger nu: $\frac{5}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{11} \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{10}{\sqrt{11}}$

Metod 2 Använd att h är avståndet mellan P_4 och planet Π som spänns av $\overrightarrow{P_2P_1}$ och $\overrightarrow{P_2P_3}$ [redacted]

Låt n vara en normalvektor till Π. Då,

avstånd $(P_4, \Pi) = |\text{orto proj av } \overrightarrow{P_2P_4} \text{ på } n| \underset{\text{proj. formeln}}{=} \left| \frac{\overrightarrow{P_2P_4} \cdot n}{|n|^2} n \right| =$

$\frac{|\overrightarrow{P_2P_4} \cdot n|}{|n|} = \begin{bmatrix} \text{en normal till } \Pi \\ \text{ges av } \overrightarrow{P_2P_1} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (-3,1,-1) \end{bmatrix} =$

$\frac{|(3,5,6) \cdot (-3,1,-1)|}{\sqrt{11}} = \frac{|-9+5-6|}{\sqrt{11}} = \frac{10}{\sqrt{11}}$

Slutsats höjden är $\frac{10}{\sqrt{11}}$

c) Spegling – bevarar volym $\Rightarrow$ volym $(f(T)) = $ volym $(T) = \frac{5}{3}$

– bevarar längd $\Rightarrow$ höjd $(f(T)) = $ höjd $(T) = \frac{10}{\sqrt{11}}$

d) Skalning med 2 [redacted]

– volym $\underbrace{\text{[redacted]}}_{\text{skalas}}$ med $2^3 = 8 \Rightarrow$ volym $(g(T)) = 8 \cdot \frac{5}{3} = \frac{40}{3}$

– längd skalas med 2 $\Rightarrow$ höjd $(g(T)) = 2 \cdot \frac{10}{\sqrt{11}} = \frac{20}{\sqrt{11}}$

---

3 a) Ansätt $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow VL = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a-b \\ c & 2c-d \end{bmatrix}$

$HL = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d \end{bmatrix}$

$HL = VL \Leftrightarrow (*) \begin{cases} a = a+2c & (I) \\ 2a-b = b+2d & (II) \\ c = -c & (III) \\ 2c-d = -d & (IV) \end{cases}$

(III) $\Rightarrow c = 0$ Sätt in i (*)

$\begin{cases} a = a & (I') \\ 2a-2b-2d = 0 & (II') \\ -d = -d & (III') \end{cases}$

Obs (I') & (III') trivialt uppfyllda. Alltså (*) $\Leftrightarrow a-b-d=0$

Sätt $d = t, b = s \Rightarrow a = s+t$

Slutsats: de matriser som kommuterar med A är

$\left\{ X = \begin{bmatrix} s+t & s \\ 0 & t \end{bmatrix} \quad s,t \in \mathbb{R} \right\}$

3b) Med samma ansats får vi nu

$$\begin{bmatrix} a & 2a-b \\ c & 2c-d\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-a-2c \\ 2a-b=-b-2d \\ c=c \\ 2c-d=d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ a+d=0 \\ c-d=0\end{cases}$$

Sätt $d=t$ $b=s$ $\Rightarrow$ $c=t$ $a=-t$

De matriser som antikommuterar med A är

$$\left\{ X=\begin{bmatrix} -t & s \\ t & t\end{bmatrix} \quad s,t\in\mathbb{R} \right\}$$

c) Antag att X kommuterar och antikomm m A.

Då är $\begin{cases} AX = XA & \text{(I)} \quad (1) \\ AX=-XA & \text{(II)} \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2AX=0$ mult m A^{-1} (Obs $|A|=-1$ så A inverterbar)

$\Rightarrow X = 0$

Slutsats Den enda matris som både kommuterar och antikommuterar med A är $X=0=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$

d) Ja, tag tex $X=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$. Då $AX=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0\end{bmatrix}$, $XA=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

---

4 a) $f(\lambda u+\lambda' u') = (\lambda u+\lambda' u')\times(1,2,3) = \Big[$X-prod distributiv $(\lambda u)\times v=\lambda(u\times v)\Big]$

$= \lambda(u\times(1,2,3)) + \lambda'(u'\times(1,2,3)) = \lambda f(u)+\lambda' f(u')$.

Alltså är f linjär.

b) $\text{Noll}(A) = \{u,\ f(u)=0\} = \{u\times(1,2,3)=0\} =$

$\{u$ parallell med $(1,2,3)\}$ = linjen $t(1,2,3)$, $t\in\mathbb{R}$

$\text{nolldim}(A) = \dim(\text{Noll}(A)) = 1$

$\text{rang}(A) = 3-\text{nolldim}(A) = 2$ (dimensionssatsen)

Obs: $u\times(1,2,3)$ vinkelrät mot (u och) $(1,2,3)$.

Alltså är $\text{Kolonn}(A) = f(\mathbb{R}^3) \subseteq$ planet Π med normalvektor $(1,2,3)$ som går genom 0, dvs $\Pi=\{x+2y+3z=0\}$.

Vi vet också att $\dim(\text{Kolonn}(A))=2$. Alltså $\text{Kolonn}(A)=\Pi$

TMA 660 26/10 15

4b) Alternativt: Antag $u \in \Pi$. Obs att $f\left(\frac{u \times (1,2,3)}{|(1,2,3)|^2}\right) = u$

Alltså Kolonn $(A) \supseteq \Pi$. Alltså Kolonn $(A) = \Pi$.

---

5) Minns: p reella koefficienter $\Rightarrow$ Om $p(\alpha)=0$ så $p(\bar{\alpha})=0$

$\Rightarrow$ p har ett jämnt antal icke-reella nollställen

$\Rightarrow$ p har åtminstone ett reellt nollställe

tolkn. av uppg. $a \neq 0$ $\Rightarrow$ $p(1+i)=0$ medför $p(1-i)=0$

$p(ai)=0$ medför $p(-ai)=0$, givet att $a \neq 0$

$\Rightarrow$ p har som mest 5 reella nollställen

tolkn. $a=0$ tillåtet (villkoret ai nollställe tas bort) $\Rightarrow$ p har som mest 7 reella nollställen

---

6) Antag $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ Några förslag på lösning:

Förslag 1: Minns $A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & -D_{21} & \cdots \\ -D_{12} & & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$

Antag $i<j$. Då $D_{ij} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \ddots & \lambda_{i-1} & \\ 0 & & 0 & \\ & & & \ddots \; 0 \end{vmatrix} = 0$ Alltså är elementet nedanför diagonalen i A^{-1} 0.

Förslag 2: Antag att $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots \\ b_{21} & & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$ uppfyller $BA = I$

Obs: VL: $BA = \begin{bmatrix} \lambda_1 b_{11} & \cdots \\ \lambda_1 b_{21} & \cdots \\ \vdots & \ddots \\ \lambda_1 b_{n1} & \end{bmatrix}$ Eftersom $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$ så är $\lambda_1 \neq 0$. Alltså medför $BA=I$ att $b_{21} = \cdots = b_{n1} = 0$

Alltså är B på formen $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots \\ 0 & b_{22} & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & b_{n2} & \end{bmatrix}$

Nu $BA = \begin{bmatrix} \lambda_1 b_{11} & * & \\ 0 & \lambda_2 b_{22} & \\ \vdots & \lambda_2 b_{32} & \\ & \vdots & \\ 0 & \lambda_2 b_{n2} & \end{bmatrix}$ Nu medför $BA = I$ att $b_{32} = \cdots = b_{n2} = 0$

Upprepa ög för resterande kolonner $\Rightarrow$ alla element nedanför diag $= 0$

TMA 660 26/10 15 ⑤

6) Förslag 3: Kan beräkna A^{-1} med elementära radop. av typen • Lägg $\lambda\cdot$ rad j till rad k där $j>k$. Detta motsvarar multiplikation med elementär matris

$E=\begin{bmatrix}1 & & \lambda\\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}$, samt typen • Mult rad k med λ, vilket motsvarar mult med matris $E'=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{bmatrix}$.

~~[illegible]~~ Alltså $A^{-1}=E_1\cdots E_s$ där $E_1,\dots,E_s$ är av typ E eller E', som är uppåt triangulära. Det är lätt att se att produkten av uppåt triangulära matriser är uppåt triangulär. Alltså är A^{-1} uppåt triangulär.

---

7) Se Sparr kap 6.2 (Def 3 & Sats 2)

---

8) a) $\mathbb{u}^{\perp}\cdot\mathbb{v}=(\mathbb{u}-\mathbb{u}')\cdot\mathbb{v}\underset{\uparrow}{=}\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}-\frac{\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}}{|\mathbb{v}|^2}\underbrace{\mathbb{v}\cdot\mathbb{v}}_{|\mathbb{v}|^2}=\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}-\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}=0$

skalärprod distr.

Alltså $\mathbb{u}\perp\mathbb{v}$ □

b) Klart $\mathbb{u}'$ parallell med $\mathbb{v}$ (ty skalär $\cdot\,\mathbb{v}$).

Alltså finns en uppdelning $\mathbb{u}=\mathbb{u}'+\mathbb{u}^{\perp}$

parallell m $\mathbb{v}$ — vinkelrät mot $\mathbb{v}$

Visa att den är entydig: Antag $\mathbb{u}=\tilde{\mathbb{u}}'+\tilde{\mathbb{u}}^{\perp}$ annan uppdelning.

Då $\mathbb{u}'+\mathbb{u}^{\perp}=\tilde{\mathbb{u}}'+\tilde{\mathbb{u}}^{\perp}\iff\underbrace{\mathbb{u}'-\tilde{\mathbb{u}}'}_{\text{parallell med }\mathbb{v}}=\underbrace{\tilde{\mathbb{u}}^{\perp}-\mathbb{u}^{\perp}}_{\text{ortogonal mot }\mathbb{v}}$

Den enda vektor som är både parallell med och vinkelrät mot $\mathbb{v}$ är $\mathbb{0}$. Alltså $\mathbb{u}'-\tilde{\mathbb{u}}'=\tilde{\mathbb{u}}^{\perp}-\mathbb{u}^{\perp}=\mathbb{0}\Rightarrow\begin{array}{l}\mathbb{u}'=\tilde{\mathbb{u}}'\\ \mathbb{u}^{\perp}=\tilde{\mathbb{u}}^{\perp}\end{array}$

Alltså är uppdelningen unik. □