MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2016-01-04 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen | Telefonvakt: Olof Giselsson
Telefon: 0703-088304

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 p (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Låt $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Beräkna $\det(A_1)$ och $\det(A_2)$.

(b) För $j = 1, 2$, låt $f_j : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vara den linjära avbildning vars avbildningsmatris är A_j. Bestäm värdemängden av f_1 respektive f_2.

(c) Ligger $\mathbf{y} = (1, 1, 2, 2)$ i bilden av f_2? Det vill säga, finns det något $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ så att $f_2(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$? (7 p)

2. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 p. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (7 p)

(a) Antag att A är en $(m \times n)$-matris. Då har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en eller oändligt många lösningar.

(b) Antag att A är en 5×5-matris av rang 4. Då gäller att någon underdeterminant till A av ordning 3 är nollskild.

(c) Antag att matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning. Då ger minsta kvadratmetoden en entydig lösning till $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

(d) Det finns polynom av grad 7 med reella koefficienter som saknar reella nollställen.

(e) Det finns matriser A och B av typ 5×6 respektive 6×7, så att rangen av AB är 6.

(f) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning vars avbildningsmatris är $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Då är f injektiv.

(g) Det finns oändligt många vektorer som är ortogonala mot $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ och $(7, 8, 9)$.

3. Låt $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, och låt $A = \mathbf{v}\mathbf{v}^T$.

(a) Bestäm A's kolonnrum, nollrum, rang och nolldimension. (4 p)

(b) Beräkna A^r för $r \in \mathbb{N}$. Bestäm A^r's kolonnrum, nollrum, rang och nolldimension. (4 p)

Tips: Om du inte vet hur du skall göra detta i allmänhet kan det vara bra att börja med små r. En lösning för $r = 2$ ger 2 poäng.

4. Låt T vara tetraedern med hörn i $P_1 = (3,0,0)$, $P_2 = (0,3,0)$, $P_3 = (0,0,3)$ och $P_4 = (3,3,3)$.

(a) Beräkna volymen av T.

Minns: Volymen av en kon (speciellt en tetraeder) med basarea B och höjd h är $\frac{1}{3} \cdot B \cdot h$.

(b) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på planet $\Pi = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Beskriv $f(T)$. Bestäm speciellt bilderna $f(P_j), j = 1, \ldots, 4$ av hörnen. Vad är arean av $f(T)$? (7 p)

5. (a) Antag att A är en ortogonal $(n \times n)$-matris. Visa att $\det(A) = \pm 1$.

(b) Gäller omvändningen? Det vill säga medför $\det(A) = \pm 1$ att A är ortogonal? Motivera ditt svar. Om svaret är nej räcker det att ange ett motexempel. (I detta ingår att visa att det exempel du valt är ett motexempel.) (5 p)

6. Avgör om funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ som ges av $z \mapsto e^z$ är injektiv, surjektiv respektive bijektiv. (6 p)

7. Formulera och bevisa den distributiva lagen för vektorprodukt (inklusive lemmat). (6 p)

8. Låt A vara en $(n \times n)$-matris. Visa att om A är inverterbar så är inversen entydigt bestämd. (4 p)

Lycka till!

Elizabeth