TMA 660 Linjär algebra och geometri 15/8 16 lösn

1a) det.1 $= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & 5 \\ 5 & -3 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -4 & -1 & 5 \\ -3 & 8 & 5 \end{vmatrix} =$

(-2) $(+1)$

utv. längs rad 2

$-1 \begin{vmatrix} -4 & 5 & 5 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot 1\cdot(-6)\cdot 5 = \underline{\underline{-30}}$

Sarrus

det.2 $= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}}$ eftersom rad 1 & 3 lika.

b) Låt $A = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix}$

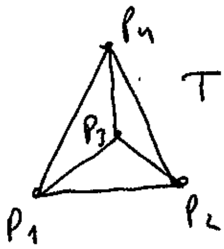
det.1 $\neq 0 \Rightarrow a_1, a_3, a_3, a_5$ linjärt oberoende
det.2 $= 0 \Rightarrow a_1, a_2, a_4, a_5$ linjärt beroende $\Bigg\} \Longrightarrow$

$\{a_1, a_2, a_3, a_5\}$ bas för Kolonn$(A) = $ span$(a_1, \dots, a_5)$,

dvs $\underline{\underline{\{(3,1,3,5), (2,2,2,7), (5,0,-1,8), (2,-1,2,0)\}}}$ bas för Kolonn(A)

$\underline{\underline{\text{rang}(A)}} = \dim(\text{Kolonn } A) = \underline{\underline{4}}$

$\underline{\underline{\text{nolldim}(A)}} = \#$ kolonner $-$ rang$(A) = 5-4 = \underline{\underline{1}}$

2a) 

Volymen av T är absolutbeloppet av

$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} | & | & | \\ \overrightarrow{P_1P_2} & \overrightarrow{P_1P_3} & \overrightarrow{P_1P_4} \\ | & | & | \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} 18 = 3$

Slutsats: Volymen av T är $\underline{\underline{3}}$.

b) Obs $f(P_j) = A\,\overrightarrow{OP_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_3 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \Rightarrow f(P_1) = (0,0,0)$

$f(P_2) = (0,1,0)$ $\quad f(P_3) = (0,2,3)$ $\quad f(P_4) = (-6,4,5)$

f linjär $\Rightarrow$ linjer & plan avbildas på linjer resp. plan
$\Rightarrow$ tetraeder avbildas på tetraeder.

Slutsats: T avbildas på en tetraeder med hörn i $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,2,3)$ och $(-6,4,5)$.

$\text{Vol}(f(T)) = \big||A|\big| \text{Vol}(T) = \left|\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right| \cdot 3 = |-1| \cdot 3 = 3$

Slutsats: Volymen av f(T) är $\underline{\underline{3}}$.

TMA 660 18/8 16 lösn

2c) $\underline{\text{Obs}}$ $f: \mathbb{e}_1 \mapsto \mathbb{e}_2 \mapsto \mathbb{e}_3 \mapsto -\mathbb{e}_1 \mapsto -\mathbb{e}_2 \mapsto -\mathbb{e}_3 \mapsto \mathbb{e}_1$

Speciellt ser vi att $f^6 = id \Rightarrow g = f^{10} = f^4$

och att $f^4: \mathbb{e}_1 \mapsto -\mathbb{e}_2$, $\mathbb{e}_2 \mapsto -\mathbb{e}_3$, $\mathbb{e}_3 \mapsto \mathbb{e}_1$. Alltså är matrisen för

$$f^4 \quad \begin{bmatrix} | & | & | \\ -\mathbb{e}_2 & -\mathbb{e}_3 & \mathbb{e}_1 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Alltså

$$A^{10} = \text{matrisen av } g = \text{matrisen av } f^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(P_j) = A^{10}\,\overrightarrow{OP_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_3 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$g(P_1) = (0,0,0)$, $g(P_2) = (0,-1,0)$, $g(P_3) = (0,-2,-3)$, $g(P_4) = (6,-4,-5)$

$\text{Vol}(g(T)) = \left| |A^{10}| \right| \text{Vol}(T) = |(-1)^{10}| \cdot 3 = 3$

$\underline{\text{Slutsats}}$ $g(T)$ är en tetraeder med hörn i $(0,0,0), (0,-1,0), (0,-2,-3)$ och $(6,-4,-5)$. Volymen av $g(T)$ är 3.

---

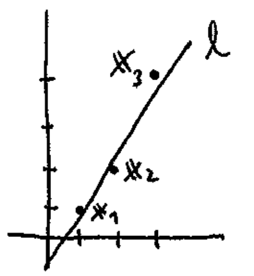
3) $$|\mathbb{u}+\mathbb{v}|^2 = (\mathbb{u}+\mathbb{v})\cdot(\mathbb{u}+\mathbb{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{distributivitet} \\ + \text{ kommutativitet}}}{=} \mathbb{u}\cdot\mathbb{u} + 2\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} + \mathbb{v}\cdot\mathbb{v} = |\mathbb{u}|^2 + |\mathbb{v}|^2 + 2\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}$$

Alltså $|\mathbb{u}+\mathbb{v}|^2 - |\mathbb{u}|^2 - |\mathbb{v}|^2 = 2\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} = 0$ omm $\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} = 0$, vilket per definition betyder att $\mathbb{u}$ & $\mathbb{v}$ är ortogonala

---

4a) Antag att det finns en linje $l(x) = a_0 + a_1 x$ som innehåller punkterna $\mathbb{X}_j = (x_j, y_j)$ $\mathbb{X}_1 = (1,1)$, $\mathbb{X}_2 = (2,2)$, $\mathbb{X}_3 = (3,4)$.

$$\left.\begin{aligned} \text{Då } \mathbb{X}_1 \in l &\Rightarrow 1 = a_0 + 1\cdot a_1 \\ \mathbb{X}_2 \in l &\Rightarrow 2 = a_0 + 2a_1 \\ \mathbb{X}_3 \in l &\Rightarrow 4 = a_0 + 3a_1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}}_{=:\mathbb{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{=:\mathbb{b}}$$



Att hitta en linje som är anpassad efter $\mathbb{X}_j$ i minsta kvadratmening innebär att lösa ekvationssystemet $A^T A \mathbb{a} = A^T \mathbb{b}$ $(*)$.

Räkning ger $A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$, $A^T \mathbb{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \end{bmatrix}$. Obs $A^T A$ inv.bar med invers $(A^T A)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$. Det följer att $(*)$ har entyd. lösn $\mathbb{a} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbb{b} = \ldots = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 3/2 \end{bmatrix}$, vilket motsvarar linjen $l(x) = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2}x$

Slutsats $l(x) = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2}x$ är anpassad efter $\mathbb{X}_j$ i minsta kvadrat-bemärkelse.

b) Antag att det finns en andragradskurva $C(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ som innehåller $\mathbb{X}_j$.

Då
$$\left.\begin{aligned} \mathbb{X}_1 \in C &\Rightarrow 1 = a_0 + a_1 + a_2 \\ \mathbb{X}_2 \in C &\Rightarrow 2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 \\ \mathbb{X}_3 \in C &\Rightarrow 4 = a_0 + 3a_1 + 9a_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}}_{=:\mathbb{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{=:\mathbb{b}} \quad (**)$$

Testa att lösa (*):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 4 \end{array}\right] \begin{matrix} -1 \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 3 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -2 \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \cdot 1/2 \quad -3/2 \quad -1/2 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -1 \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right]$$

Alltså är $\mathbb{a} = (1, -1/2, 1/2)$ en lösn till $(**)$ och därmed också en minsta kvadrat lösn.

Slutsats: $\mathbb{X}_j$ ligger på kurvan $l(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$. (speciellt är denna anpassad till $\mathbb{X}_j$ i minsta kvadrat-bemärkelse.)

c)
$$\sum_{j=1}^{3} |y_j - l(x_j)|^2 = \begin{bmatrix} l(x_1) = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{5}{6} \\ l(x_2) = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} \cdot 2 = 2\frac{1}{3} \\ l(x_3) = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} \cdot 3 = 4\frac{1}{6} \end{bmatrix} =$$

$$\left|1 - \frac{5}{6}\right|^2 + \left|2 - 2\frac{1}{3}\right|^2 + \left|4 - 4\frac{1}{6}\right|^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

Slutsats Felet är $\sqrt{\sum |y_j - l(x_j)|^2} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

$\mathbb{X}_j$ ligger på C. Alltså är felet $\sqrt{\sum |y_j - C(x_j)|^2} = 0$.

5a) Antag $A^l = \mathbb{0}$ för ngt l.

Då $0 = \det(A^l) \underset{\substack{\uparrow \\ \det \text{ multiplikativ}}}{=} (\det A)^l \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow A$ ej inverterbar.

Alltså $A^l = \mathbb{0} \Rightarrow A$ ej inverbar. $\square$

b) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Då $\det(A) = 0$ (dvs A ej inverbar), men $A^l = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^l = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$ för alla l (f_A är projektion på en linje), dvs A ej nilpotent.

Alltså A ej inverbar medför inte att A nilpotent.

6) a) FALSKT Tag t ex $A = [1\ 0]$ $B = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. Då $AB = [1]$ inverterbar, $BA = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ ej inverterbar

b) FALSKT, Ta vektorn $(-3,1)$ med längd $\sqrt{10}$ avbildas på 0-vektorn.

c) FALSKT. Tag t ex $A = \begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&0&\\&&1&&\\&0&&1&\\&&&&0\end{bmatrix}$ Då är underdet där man stryker rad 1 och kolonn 1 $\begin{vmatrix}1&&&\\&1&0&\\&0&1&\\&&&0\end{vmatrix} = 0$.

d) FALSKT. Tag t ex $A = [1\ 1]$ $B = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ Då är $AB = [0]$.

e) SANT. Obs att spegling är sin egen invers. Alltså $f \circ f \circ f = id \circ f = f$.

f) SANT, ty $\begin{bmatrix}2&1&4\\0&-1&2\\0&0&3\end{bmatrix}$ är inverterbar.

---

7 a) se t ex Def 2 s 85, Span

b) se t ex Sats 4 s 87, Span

c) $|u \times v| = |u||v| \sin\theta$ ← minsta vinkel mellan u & v

$\leq |u||v| \cdot 1 = |u||v|$

Likhet gäller då $\sin\theta = 1 \Leftrightarrow u, v$ ortogonala

d) Obs $(e_1 \times e_2) \times e_2 = e_3 \times e_2 = -e_1$ men

$e_1 \times (e_2 \times e_2) = e_1 \times 0 = 0$

Alltså $(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w)$ i allmänhet.

---

8 Se t ex Sats 7 s 479 Persson-Böiers