

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. (a) Låt $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Beräkna $\det A$.
- (b) Låt T vara tetraedern med hörn $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (-5, -3, -3)$, $P_3 = (3, 1, 3)$ och $P_4 = (3, 3, 1)$. Bestäm volymen av T .
Tips: Minns att volymen av en kon (speciellt en tetraeder) med basarea B och höjd h är $\frac{1}{3} \cdot B \cdot h$.
- (c) Beräkna $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 3 & 3 \\ -3 & 1 - \lambda & 3 \\ -3 & 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$.
- (d) För vilka $\lambda \in \mathbb{R}$ är $\det(A - \lambda I) = 0$?
- (e) Bestäm rangen av $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -5 - \lambda & 3 & 3 \\ -3 & 1 - \lambda & 3 \\ -3 & 3 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$ för varje $\lambda \in \mathbb{R}$. (8 p)
2. Låt $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ vara planet som går genom punkterna $(5, 0, -3)$, $(4, -3, 0)$ och $(0, 5, -4)$ och låt $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på Π .
- (a) Skriv Π på formen $\{ax + by + cz = d\}$.
- (b) Visa att f är en linjär avbildning.
Tips: Använd att ortogonal projektion på ett plan Π är en linjär avbildning om och endast om origo ligger i Π .
- (c) Bestäm avbildningsmatrisen A_f till f .
- (d) Låt T vara tetraedern från uppgift 1.(b). Vad är volymen av $f(T)$?
- (e) Beräkna A_f^2 . (9 p)
3. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 . (6 p)
- (a) Ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 11 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ har en unik lösning.
- (b) Om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ är positivt orienterade så är $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2$ positivt orienterade.
- (c) Antag att A är en (5×5) -matris av rang 3. Då är alla underdeterminanter till A av ordning 4 lika med 0.
- (d) Det gäller att $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ för alla vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$.
- (e) Det finns oändligt många vektorer som är vinkelräta mot $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 1, 1)$.

- (f) Låt $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning vars avbildningsmatris är $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Då är f surjektiv.

4. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

- (a) Avgör om A har en högerinvers, d v s en matris H så att $AH = I$. Motivera ditt svar. Om svaret är ja bestäm en högerinvers till A .
- (b) Avgör om A har en vänsterinvers, d v s en matris V så att $VA = I$. Motivera ditt svar. Om svaret är ja bestäm en vänsterinvers till A . (5 p)

5. Låt A vara en (4×5) -matris.

- (a) Är det sant att om $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ för något $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ i \mathbb{R}^5 , så följer att $A = \mathbf{0}$? Motivera ditt svar. Om svaret är nej så räcker det att ange ett motexempel. (I detta ingår att visa att det motexempel du valt är ett motexempel.)
- (b) Är det sant att om $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ för alla \mathbf{x} i \mathbb{R}^5 , så följer att $A = \mathbf{0}$? Motivera ditt svar. Om svaret är nej så räcker det att ange ett motexempel. (I detta ingår att visa att det motexempel du valt är ett motexempel.) (5 p)

6. För $i, j \in \mathbb{R}$ låt $\max(i, j)$ beteckna det största av talen i och j . Låt A vara $(n \times n)$ -matrisen med matriselementen $a_{ij} = \max(i, j)$. Beräkna $\det(A)$. (5 p)

7. Visa att ekvationen

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

har en icke-trivial lösning (d v s en annan lösning än den triviala lösningen $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$) om och endast om någon av vektorerna $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ är en linjärkombination av de andra. (6 p)

8. (a) Formulera algebrans fundamentalsats.
- (b) Låt $p(z)$ vara ett polynom av grad n . Använd algebrans fundamentalsats för att visa att p kan faktoriseras som

$$p(z) = \gamma(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n),$$

där $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ är nollställena till $p(z)$ och $\gamma \in \mathbb{C}$ är skilt från noll. (6 p)

Lycka till!

Elizabeth