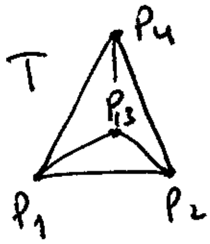
1 a+c) $\begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & 1-\lambda & 3 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{det linjär i kolumn 1}}{=} - \begin{vmatrix} 5+\lambda & 3 & 3 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=}$

$-\left[(5+\lambda)(1-\lambda)^2 + 3\cdot3\cdot3 + 3\cdot3\cdot3 - (5+\lambda)\cdot3\cdot3 - 3\cdot3\cdot(1-\lambda) - 3\cdot3(1-\lambda)\right] =$

$\ldots = \underline{\underline{4-3\lambda^2-\lambda^3}}$ Sätt $\lambda = 0$: $\underline{\underline{|A|}} = \begin{vmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{4}}$

b) T



Minns: Volymen av T är absolutbeloppet av $\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{P_1P_2}\ \overrightarrow{P_1P_3}\ \overrightarrow{P_1P_4}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|A| = \frac{1}{6}4 = \frac{2}{3}$

Slutsats Vol (T) = $\underline{\underline{2/3}}$

c) Lös $4-3\lambda^2-\lambda^3=0$! Lätt se att $\lambda=1$ är en lösning.
Faktorsatsen $\Rightarrow$ $\lambda-1$ faktor i $4-3\lambda^2-\lambda^3 =: p(\lambda)$
Polynomdivision ger $p(\lambda) = -(\lambda^2+4\lambda+4)(\lambda-1)$
Obs $\lambda^2+4\lambda+4 = (\lambda+2)^2$ Alltså $p(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2$.
Alltså $\det(A-\lambda I) = p(\lambda) = 0$ för $\underline{\underline{\lambda = 1}}$ och $\underline{\underline{\lambda=-2}}$ (mult 2)

d) För $\underline{\underline{\lambda \neq 1,\ \lambda\neq -2}}$ är $\det(A-\lambda I)\neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{rang}(A-\lambda I) = 3}}$

$\underline{\underline{\lambda=1}}$: $A - I = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ← Använd elementära radoper. för att få trappformad matris.

$\begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -6 & 0 & 6 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} (-1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} (1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T$ pivot

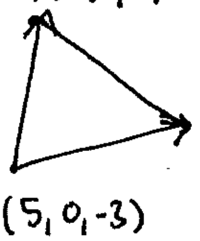
rang $(A-I) = \#$ pivot i $T = \underline{\underline{2}}$

$\underline{\underline{\lambda=-2}}$ $A+2I = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} (-1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T$ pivot

rang $(A+2I) = \#$ pivot i $T = \underline{\underline{1}}$

---

2 a) Π $R=(0,5,-4)$



$Q=(4,-3,0)$

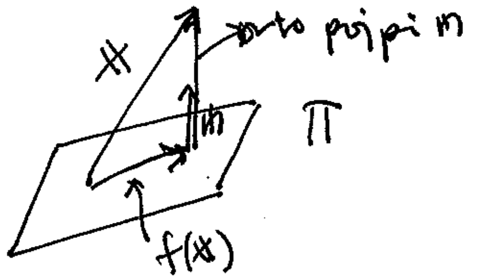
$P=(5,0,-3)$

Obs: $\overrightarrow{PQ} = (-1,-3,3)$ $\overrightarrow{PR} = (-5,5,-1)$
en normal till Π fås som

$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} \underset{\text{Sarrus}}{=} \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -3 & 3 \\ -5 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (3-15, -15-1, -5-15)$
$= (-12,-16,-20) =$
$-4(3,4,5)$.

En normal till Π är $\mathbf{n}=(3,4,5)$.
Vet nu att Π är på formen $\{3x+4y+5z=d\}$ för något $d\in\mathbb{R}$.
Sätt in en punkt för att bestämma d: $p\in\Pi$ ger $3\cdot 5-5\cdot 3=d$
$\Leftrightarrow d=0$. Alltså $\boxed{\Pi=\{3x+4y+5z=0\}}$

b) Obs $\mathbf{0}=(0,0,0)$ uppfyller ekv. för Π $(3\cdot 0+4\cdot 0+5\cdot 0=0)$.
Alltså $\mathbf{0}\in\Pi$. Alltså f. linjär avbildning.

c) 

Minns: orto proj av $\mathbf{x}$ på $\mathbf{n}=\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$

Alltså $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}-\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}=\mathbf{x}-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}=$

[Om ident. $\mathbf{x}$ med $\begin{bmatrix}|\\ \mathbf{x}\\ |\end{bmatrix}$ och $[a]=a$]

$$I\mathbf{x}-\frac{1}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{x}=\left(I-\frac{1}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}\mathbf{n}^T\right)\mathbf{x}$$

Alltså är avbildningsmatrisen $\left(I-\frac{1}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}\mathbf{n}^T\right)=A_f$

Obs: $|\mathbf{n}|^2=3^2+4^2+5^2=50$

$$\mathbf{n}\mathbf{n}^T=\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&12&15\\12&16&20\\15&20&25\end{bmatrix}$$

Alltså $A_f=\frac{1}{50}(50I-\mathbf{n}\mathbf{n}^T)=\frac{1}{50}\left(\begin{bmatrix}50&0&0\\0&50&0\\0&0&50\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9&12&15\\12&16&20\\15&20&25\end{bmatrix}\right)=$

$$\boxed{\frac{1}{50}\begin{bmatrix}41&-12&-15\\-12&34&-20\\-15&-20&25\end{bmatrix}}$$

d) Obs Kolonn$(A_f)=\Pi\subsetneq\mathbb{R}^3$. Alltså det$(A)$. Alltså Vol$(f(\square))=0$.

e) Obs $f(\mathbf{x}')=\mathbf{x}'$ om $\mathbf{x}'$ parallell med Π.
Skriv $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ som $\mathbf{x}=\underbrace{\mathbf{x}'}_{\text{parallell m }\Pi}+\underbrace{\mathbf{x}^\perp}_{\text{ortogonal mot }\Pi}$. Då $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}'$
$f\circ f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}')=\mathbf{x}'$

Alltså $f\circ f=f\Rightarrow A_{f\circ f}=A_f$
Men vi vet också att $A_{f\circ f}=A_fA_f$ Alltså $\boxed{A_f^2=A_f=\frac{1}{50}\begin{bmatrix}41&-12&-15\\-12&34&-20\\-15&-20&25\end{bmatrix}}$

---

3 a) FALSKT Obs rang$(A)\le 3\Rightarrow$ nolldim$(A)\ge 1$
b) FALSKT
c) SANT Minns rang(A) = ordning på största nollskilda underdet
d) FALSKT X-prod ej associativ

TMA 660 24/10 16

e) FALSKT Obs $u \perp (1,0,0), (0,1,0), (0,1,1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ u \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (*)

$\begin{vmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&1&1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ så (*) har endast lösn. $u = 0$.

f) SANT Värdemängden (f) = Kolonn (A) = span $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \mathbb{R}^2$

4a) $A = \begin{bmatrix} 1&2&3 \\ 4&5&6 \end{bmatrix}$ Lätt att se att kolonnerna i A spänner hela $\mathbb{R}^2$. Alltså $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbart $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Alltså har A högerinvers.

Obs H högerinvers om $H = \begin{bmatrix} | & | \\ h_1 & h_2 \\ | & | \end{bmatrix}$ där $Ah_1 = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (1)

$Ah_2 = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (2)

Vill alltså lösa ekv (1) & (2):

(1): $\left[\begin{array}{ccc|c} 1&2&3&1 \\ 4&5&6&0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3&6&9&3 \\ 0&-3&-6&-4 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3&0&-3&-5 \\ 0&-3&-6&-4 \end{array}\right]$ (I) (II)

Vi vill bara hitta en högerinvers till A. Alltså räcker det att hitta en lösning till (1).

x_3 är en fri ~~parameter~~ variabel. Välj x_3 som 0.

Då (II) $\Rightarrow -3x_2 = -4 \Leftrightarrow x_2 = 4/3$

(I) $\Rightarrow 3x_1 = -5 \Leftrightarrow x_1 = -5/3$

Alltså ges en lösning till (1) av $h_1 = \frac{1}{3}(-5, 4, 0)$

(2): $\left[\begin{array}{ccc|c} 1&2&3&0 \\ 4&5&6&1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3&6&9&0 \\ 0&-3&-6&1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3&0&-3&2 \\ 0&-3&-6&1 \end{array}\right]$ (I) (II)

x_3 fri, välj $x_3 = 0$ Då (II) : $-3x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = -1/3$

(I) : $3x_1 = 2 \Leftrightarrow x_1 = 2/3$

Alltså ges en lösning till (2) av $h_2 = \frac{1}{3}(2, -1, 0)$

Alltså en högerinvers ges av $H = \begin{bmatrix} | & | \\ h_1 & h_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}}$

b) Obs om A har vänsterinvers måste den vara av typ 3×2 $V = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}$. Obs att kolonnerna i

$VA = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix} A$ kommer vara linjärkombinationer av

v_1 och v_2. Men två kolonner kan inte spänna hela $\mathbb{R}^3$ = Kolonn (I). Med andra ord Kolonn $(VA) \subseteq$ Span $(v_1, v_2) \subsetneq \mathbb{R}^3$ = Span (I) $\Longrightarrow VA \neq I$.

5a) Tag t.ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ och $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0$ Då $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Slutsats $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ för något $\mathbf{x} \neq 0$ implicerar inte att $A = \mathbf{0}$.

b) Antag att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\forall$ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Antag $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \\ a_{41} & \cdots & a_{4s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_s \\ | & & | \end{bmatrix}$

Tag $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow$ plats j. Då $A\mathbf{x} = A\mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{4j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{a}_j \\ | \end{bmatrix}$

Att $A\mathbf{e}_j = \mathbf{0}$ implicerar alltså att $\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$.
Eftersom $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\forall$ $\mathbf{x}$ så gäller speciellt att $A\mathbf{e}_j = \mathbf{0}$ för alla j, dvs $\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$ för alla j, dvs $A = \mathbf{0}$.

Slutsats $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\forall$ $\mathbf{x} \Longrightarrow A = \mathbf{0}$.

---

6)

$$\underline{\underline{|A|}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots\; n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ (-1) \\ \\ \\ (-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ -1 & -1 & -1 & \cdots\; -1 & 0 \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} =$$

gör radoperationer

Minns radoperationen "tag en multipel av en rad och lägg till en annan rad" förändrar ej determinanten

Minns determinanten av en triangulär matris är produkten av diagonalelementen.

$$\underbrace{(-1)(-1)(-1)\cdots(-1)}_{n-1 \text{ st}} \cdot n = \underline{\underline{(-1)^{n-1}n}}$$

---

7) Se Sparr kap 6.2 (Def 3 & Sats 2)

8) Se Persson-Böiers kap A.10 (Sats 8, Sats 9, Följdsats 1