Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa
Datum: 2016-12-20 kl. 14.00 - 18.00
Telefonvakt: Raad Salman
Telefon: 031-772 5325

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt P vara ett parallellogram med hörn i $(1,1)$, $(4,2)$, $(5,4)$ och $(2,3)$.

(a) Beräkna arean av P. Vad är längderna på diagonalerna i P?

(b) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning vars matris är $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm bilden $f(P)$ av P under f. Vad är arean av $f(P)$? Vad är längderna på diagonalerna i $f(P)$?

(c) Låt $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara skalning med en faktor 3. Bestäm bilden $g(P)$ av P under g. Vad är arean av $g(P)$? Vad är längderna på diagonalerna i $g(P)$? (8 p)

2. Lös ekvationen

$$z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Tips: Det finns minst en rent imaginär rot. (7 p)

3. Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på planet $\Pi = \{x - y - z = 0\}$. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vara standardbasen $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ och låt

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \end{cases}.$$

(a) Bestäm avbildningsmatrisen för f (med avseende på standardbasen $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$).

(b) Visa att $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ är en bas för $\mathbb{R}^3$.

(c) Bestäm avbildningsmatrisen för f med avseende på basen $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$. (7 p)

Tips: Minns att avbildningsmatrisen för en linjär avbildning f med avseende på basen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ för $\mathbb{R}^3$ är den matris A som uppfyller att

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix},$$

där (ξ_1, ξ_2, ξ_3) och (η_1, η_2, η_3) är koordinaterna för $\mathbf{x}$ respektive $f(\mathbf{x})$ i basen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$.

4. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases},$$

där $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, och där X och Y är obekanta 2×2-matriser. (6 p)

5. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (6 p)

(a) Vektorn $\mathbf{x} = (2, 1, 0)$ är en lösning till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$.

(b) Vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$ är positivt orienterade.

(c) Antag att A är en $(n \times n)$-matris. Då är A inverterbar om och endast om $A^T A$ är inverterbar.

(d) Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ har nolldimension 0.

(e) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på planet $x - y - 3z = 0$. Det gäller att f är en isometri.

(f) Antag att $|A| = 0$. Då saknar $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösning för något $\mathbf{b}$.

6. Låt A vara $n \times n$-matrisen med matriselementen $a_{ij} = i + j$. Beräkna $\det(A)$ för alla $n \geq 1$. (5 p)

7. Formulera och bevisa den distributiva lagen för vektorprodukt (inklusive lemmat). (6 p)

8. Antag att $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ är linjärt oberoende och att de spänner upp $\mathbb{R}^n$. Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Visa att det finns entydigt bestämda reella tal $x_1, \ldots, x_n$ så att $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$. (5 p)

Lycka till!
Elizabeth