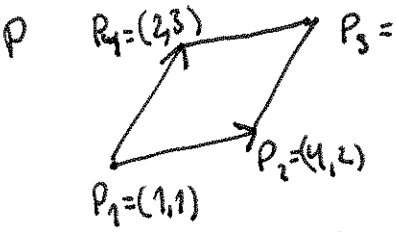
1 a) P



Obs $\overrightarrow{P_1P_2} = (4,2)-(1,1)=(3,1)$
$\overrightarrow{P_1P_4} = \dots = (1,2)$

$\underline{\underline{\text{Area}(P)}} = \left|\,\begin{vmatrix} \overrightarrow{P_1P_2} & \overrightarrow{P_1P_4} \end{vmatrix}\,\right| = \left|\,\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\,\right| = |6-1| = \underline{\underline{5}}$

Diagonaler: $\overrightarrow{P_1P_3} = (4,3)$ har längd $|\overrightarrow{P_1P_3}| = |(4,3)| = \sqrt{4^2+3^2} = \underline{\underline{5}}$
$\overrightarrow{P_2P_4} = (-2,1)$ — " — $|\overrightarrow{P_2P_4}| = |(-2,1)| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \end{bmatrix}$

$f(\overrightarrow{OP_1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f(\overrightarrow{OP_2}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, $f(\overrightarrow{OP_3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$

$f(\overrightarrow{OP_4}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$. Alltså $\underline{f(P) = \text{parallellogram med}}$ $\underline{\text{hörn i } (2,1), (6,2), (9,4) \text{ och } (5,3)}$.

$\underline{\underline{\text{Area}(f(P))}} = \left|\,\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\,\right| \cdot \text{Area}(P) = 1 \cdot 5 = \underline{\underline{5}}$

Diagonaler: $f(\overrightarrow{P_1P_3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$, längd $\underline{\underline{|f(\overrightarrow{P_1P_3})|}} = \sqrt{7^2+3^2} = \underline{\underline{\sqrt{58}}}$
$f(\overrightarrow{P_2P_4}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, längd $\underline{\underline{|f(\overrightarrow{P_2P_4})|}} = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$

c) $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \mapsto 3\mathbf{x}$ (skalning m 3)
$g(\overrightarrow{OP_1}) = 3(1,1) = (3,3)$, $g(\overrightarrow{OP_2}) = 3(4,2) = (12,6)$, $g(\overrightarrow{OP_3}) = 3(5,4) = (15,12)$
$g(\overrightarrow{OP_4}) = 3(2,3) = (6,9)$. Alltså $\underline{g(P) = \text{parallellogram med hörn i}}$
$\underline{(3,3), (12,6), (15,12), (6,9)}$

Skalning med 3 $\Rightarrow$ längder skalas med en faktor 3,
speciellt har $\underline{\text{diag. längd}}$ $3 \cdot 5 = \underline{\underline{15}}$ resp $\underline{\underline{3\sqrt{5}}}$

$\Rightarrow$ Area skalas med $3^2 = 9$, speciellt har
$g(P)$ area $9 \cdot \text{area}(P) = 9 \cdot 5 = \underline{\underline{45}}$

---

2) Låt $p(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = 0$
$\underline{\text{Givet}}$: $p(z)$ har minst ett rent imaginärt nollställe.
Ansätt $z = ai$ ($a \in \mathbb{R}$). Då:
$p(z) = (ai)^4 - 2(ai)^3 + 3(ai)^2 - 2(ai) + 2 = a^4 + 2a^3 i - 3a^2 - 2ai + 2$
$\text{Re}\, p(z) = a^4 - 3a^2 + 2$ $\quad \text{Im}\, p(z) = 2a^3 - 2a = 2a(a^2-1) = 2a(a-1)(a+1)$
Om $p(z) = 0$ så måste $\text{Re}\, p(z) = 0$ $\underline{\text{och}}$ $\text{Im}\, p(z) = 0$.

$$\text{Im}\, p(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 & \Rightarrow \text{Re}\, p(z) = 2 \neq 0 \\ a = 1 \text{ eller} & \Rightarrow \text{Re}\, p(z) = 0 \\ a = -1 & \Rightarrow \text{Re}\, p(z) = 0 \end{cases}$$

2) Alltså finns två lösn. till $\operatorname{Re} p(z) = \operatorname{Im} p(z) = 0$, (då $z = ai$),
fakt. nämligen $a = \pm i$, dvs $z = \pm i$.

Alltså har $p(z)$ en faktor $(z-i)(z+i) = z^2+1$

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{rl}
 z^2 - 2z + 2 & \\
\hline
z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 & \big| \; z^2+1 \\
-(z^4 + z^2) \quad\quad\quad\quad & \\
\hline
-2z^3 + 2z^2 - 2z + 2 & \\
-(-2z^3 - 2z) \quad\quad & \\
\hline
2z^2 \quad\; + 2 & \\
-(2z^2 + 2) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

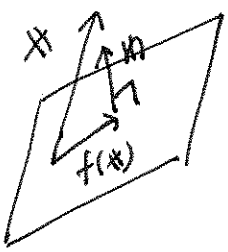
Alltså $p(z) = (z^2+1)(z^2-2z+2)$

Lös $z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = -1 \Leftrightarrow (z-1) = \pm i \Leftrightarrow z = 1 \pm i$

Slutsats Ekvationen $p(z)$ har lösn. $z = \pm i$ och $z = 1 \pm i$

---

3 a)



Minns: en normal till $\{ax+by+cz=d\}$ ges av $n = (a,b,c)$. I vårt fall kan vi alltså välja $n = (1,-1,-1)$.

Minns orto proj av x på n ges av $\frac{x \cdot n}{|n|^2} n$

Alltså $f(x) = x -$ orto proj av x på $n =$

$x - \frac{x \cdot n}{|n|^2} n = \left[\text{Identifiera } x \text{ m } \begin{bmatrix} | \\ x \\ | \end{bmatrix} \text{ och } [a] \text{ med } a \right] =$

$I x - \frac{1}{|n|^2} n n^T x = \left(I - \frac{1}{|n|^2} n n^T \right) x.$

Alltså är f's avbildningsmatris $A = I - \frac{1}{|n|^2} n n^T$

$n = (1,-1,-1)$ ger $|n|^2 = n \cdot n = 1+1+1 = 3$ $\quad n n^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} [1 \; -1 \; -1] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

vilket ger $A = \frac{1}{3}(3I - nn^T) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Slutsats: Avb.matrisen är $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

b) Låt $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\uparrow \; \uparrow \; \uparrow$

$e_1' \; e_2' \; e_3'$'s koordinater i e_1, e_2, e_3

Minns e_1', e_2', e_3' bas $\Leftrightarrow$ e_1', e_2', e_3' linj ober $\Leftrightarrow |S| \neq 0$

Sarrus

KM: $|S| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$1 + 0 + 0 - 0 + 1 + 1 = 3 \neq 0$

Slutsats: e_1', e_2', e_3' bas

3c) Obs e_1' parallell med n. Alltså $e_1' \perp \Pi \Rightarrow f(e_1') = 0$

$e_2' \cdot n = 0$, dvs e_2' parallell m $\Pi \Rightarrow f(e_2') = e_2'$

$e_3' \cdot n = 0$ — " — e_3' — " — $\Rightarrow f(e_3') = e_3'$

Avb. matris m a p basen e_1', e_2', e_3' =

$\begin{bmatrix} | & | & | \\ f(e_1') & f(e_2') & f(e_3') \\ | & | & | \end{bmatrix}$ uttryckt i basen e_1', e_2', e_3' =

[Obs $0 = (0,0,0)$ i, $e_2' = (0,1,0)$, $e_3' = (0,0,1)$ i e_1', e_2', e_3']

$\begin{bmatrix} | & | & | \\ 0 & e_2' & e_3' \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Slutsats: avb. matrisen m a p e_1', e_2', e_3' är $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

---

4) $\begin{cases} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases} \overset{A=I}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} X + BY = C \\ DX + EY = F \end{cases}$ (mult m $-D$ från vänster) $\Longleftrightarrow$

$\begin{cases} X + BY = C & (I) \\ (E-DB)Y = F - DC & (II) \end{cases}$ $E - DB = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -12 \end{bmatrix}$

$|E - DB| = -48 - 4 = -52$ så $E - DB$ inverterbar med invers $(E-DB)^{-1} = \frac{1}{-52}\begin{bmatrix} -12 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$F - DC = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$

Nu ger ekv (II): $Y = (E-DB)^{-1}(F-DC) = \frac{1}{-52}\begin{bmatrix} -12 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sätt in i ekv (I) $\Leftrightarrow X = C - BY = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Slutsats: Ekv. systemet har lösn. $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

---

5 a) SANT ty $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$

b) SANT ty $\begin{vmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$

c) SANT ty $0 \neq |AA^T| = |A||A^T| = |A|^2 \Leftrightarrow 0 \neq |A|$

d) FALSKT $\mathrm{Nul}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ där } \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \right\}$

e) FALSKT ~~ty~~ t ex $|f(n)| = |f(1,-1,-3)| = |0| = 0$ men $|n| = \sqrt{11}$

f) SANT ty $|A| = \begin{vmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1, \ldots, a_n$ spänner ej upp $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \exists\, b \in \mathbb{R}^n$ $b \notin \mathrm{Span}(a_1, \ldots, a_n)$

---

6) $n = 1$: $A = [1+1] = 2$ $|A| = \underline{\underline{2}}$

$n = 2$: $A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $|A| = 8 - 9 = \underline{\underline{-1}}$

TMA 660 20/12 16

6) $\underline{\underline{n \geq 3}}$

forts.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & \cdots & 1+n \\ 2+1 & 2+2 & & & \\ 3+1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ n+1 & \cdots & & & n+n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & & \\ 4 & 5 & & & \\ 5 & & & & \\ \vdots & & & & \\ n+1 & & & & 2n \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ (-1) \\ \\ \end{matrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n+1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 5 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ n+1 & & & & & n+n \end{vmatrix} \text{ två lika rader } = \underline{\underline{0}}$$

<u>Slutsats</u>:

$n=$	$\lvert A \rvert=$
1	2
2	-1
≥ 3	0

---

7) Se Sparr, kap 5.3

---

8) Se Sparr, kap 6.2
