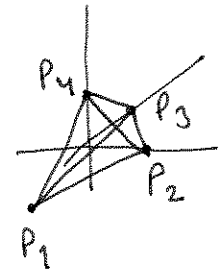
TMA660 Linjär algebra och geometri 21/8 17, lösningar

1 T:



Obs 6 kanter: $\overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,0)-(-1,-1,-1) = (2,1,1)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = \quad \dots \quad = (1,2,1)$

$\overrightarrow{P_1P_4} = \quad \dots \quad = (1,1,2)$

$\overrightarrow{P_2P_3} = (0,1,0)-(1,0,0) = (-1,1,0)$

$\overrightarrow{P_2P_4} = (0,0,1)-(1,0,0) = (-1,0,1)$

$\overrightarrow{P_3P_4} = (0,0,1)-(0,1,0) = (0,-1,1)$

a) $\mathrm{Vol}(T) = \frac{1}{6}\left|\,\left|\overrightarrow{P_1P_2}\ \overrightarrow{P_1P_3}\ \overrightarrow{P_1P_4}\right|\,\right| = \frac{1}{6}\left|\,\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\,\right| \underset{\text{Sarrus}}{=} \frac{1}{6}\left|8+1+1-2-2-2\right| = \frac{1}{6}\cdot 4 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

b) Obs: 4 sidor $P_1P_2P_3$, $P_1P_2P_4$, $P_1P_3P_4$, $P_2P_3P_4$

$\mathrm{Area}(P_1P_2P_3) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\right|$

$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1-2,\ 1-2,\ 4-1) = (-1,-1,3)$

$\left|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\right| = \sqrt{(-1,-1,3)\cdot\underbrace{(-1,-1,3)}_{\text{samma}}} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11} \Rightarrow \mathrm{Area}(P_1P_2P_3) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{11}}{2}}}$

Av symmetriskäl / på samma sätt $\mathrm{Area}(P_1P_2P_4) = \mathrm{Area}(P_1P_3P_4) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{11}}{2}}}$

$\mathrm{Area}(P_2P_3P_4) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_2P_4}\right|$

$\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_2P_4} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,1,1) \Rightarrow \dots\ \mathrm{Area}(P_2P_3P_4) = \underline{\underline{\sqrt{3}/2}}$

c) $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(2,1,1)\cdot(2,1,1)} = \underline{\underline{\sqrt{6}}}$ Symmetri / samma argument $\left|\overrightarrow{P_1P_3}\right| = \left|\overrightarrow{P_1P_4}\right| = \underline{\underline{\sqrt{6}}}$

$\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right| = \left|(-1,1,0)\right| = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$ — " — $\left|\overrightarrow{P_2P_4}\right| = \left|\overrightarrow{P_3P_4}\right| = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$

d) $A_f = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (alla vektorer skalas med en faktor 3)

$f(\overrightarrow{OP_j}) = 3\,\overrightarrow{OP_j} \Rightarrow f(T)$ är tetraedern med hörn i

$3P_1 = \underline{\underline{(-3,-3,-3)}}$, $3P_2 = \underline{\underline{(3,0,0)}}$, $3P_3 = \underline{\underline{(0,3,0)}}$, $3P_4 = \underline{\underline{(0,0,3)}}$

Volymen skalas med en faktor $3^3 = 27$. $\therefore\ \mathrm{Vol}(f(T)) = 27\cdot\frac{2}{3} = \underline{\underline{18}}$

e) Area skalas med en faktor $3^2 = 9$. Sidorna har area $\underline{\underline{9\sqrt{11}/2}}$ resp. $\underline{\underline{9\sqrt{3}/2}}$.

Längd skalas med en faktor 3. Kanterna har längd $\underline{\underline{3\sqrt{6}}}$ resp $\underline{\underline{3\sqrt{2}}}$.

2 a) Obs: kan bryta ut z^2 $\therefore$ $p(z)=z^2(z^4+2z^2+1)$

Obs vidare $z^4+2z^2+1=(z^2+1)^2$ och $z^2+1=(z-i)(z+i)$

Alltså $p(z)=z\cdot z\cdot(z-i)\cdot(z-i)(z+i)(z+i)$ $\left(=z^2(z-i)^2(z+i)^2\right)$

b) Obs: z^2+1 kan inte faktoriseras vidare reellt.

$\therefore$ $p(z)=z^2(z^2+1)^2$ reell faktorisering.

c) Det enda reella nollstället är 0 (med multiplicitet 2).

d) Alla nollställen till p är på formen ai, alltså rent imaginära.

dvs $p(z)$ har 3 rent imaginära nollställen, alla med multiplicitet 2.

---

3 a) Minns: en minstakvadratlösn är en lösn. till ekv.systemet

(*) $A^TA\hat{x}=A^Tb$ där

$$A^TA=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&2\\1&1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&4\\3&6&7\\4&7&11\end{bmatrix}\qquad A^Tb=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&2\\1&1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$$

$(A^TA)^{-1}$:

$$[A^TA\,|\,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&3&4&1&0&0\\3&6&7&0&1&0\\4&7&11&0&0&1\end{array}\right]\begin{matrix}-1\ \ -4\\ \\ \cdot 3\end{matrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&3&4&1&0&0\\0&3&3&-1&1&0\\0&9&17&-4&0&3\end{array}\right]\begin{matrix}\\ -3\\ \\ \end{matrix}\sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&3&4&1&0&0\\0&3&3&-1&1&0\\0&0&8&-1&-3&3\end{array}\right]\begin{matrix}\\ \frac{1}{3}\ \ -1\\ \cdot\frac{1}{8}\end{matrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&0&1&2&-1&0\\0&1&1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&1&-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&\frac{3}{8}\end{array}\right]\begin{matrix}\\ \\ -1\end{matrix}\sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&0&0&17/8&-5/8&-3/8\\0&1&0&-5/24&17/24&-9/24\\0&0&1&-1/8&-3/8&3/8\end{array}\right]\cdot\frac{1}{3}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\\0&1&0&\frac{1}{24}\begin{bmatrix}17&-5&-3\\-5&17&-9\\-3&-9&9\end{bmatrix}\\0&0&1&\end{array}\right]$$

$$\therefore\ (A^TA)^{-1}=\frac{1}{24}\begin{bmatrix}17&5&-3\\-5&17&-9\\-3&-9&9\end{bmatrix}$$

$\therefore$ (*) har lösning $\hat{x}=(A^TA)^{-1}A^Tb=\frac{1}{24}\begin{bmatrix}17&-5&-3\\-5&17&-9\\-3&-9&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{24}\begin{bmatrix}24\\24\\-24\end{bmatrix}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}}}$

b) $A\hat{x}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\end{bmatrix}=b$ Alltså är felet 0.

Alternativt: Lös ekv. syst. $Ax=b$. Då är detta också lösn till (*).

---

4 a) Minns: $|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$ Alltså $|AB|=0\Rightarrow|BA|=0$

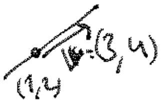
det multiplikativ

b) Ex: Låt $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix}$

Då $AB=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ och $BA=\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$

Alltså $AB=\mathbb{0}\not\Rightarrow BA=\mathbb{0}$

5 a) FALSKT (Jämför Sats 13 s 280 i Sparr)

b) SANT l:  $\mathbf{u} = (4,-3)$ uppfyller $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (4,-3)\cdot(3,4) = 0$

c) FALSKT Spegling linjär avbildning omm l går genom origo

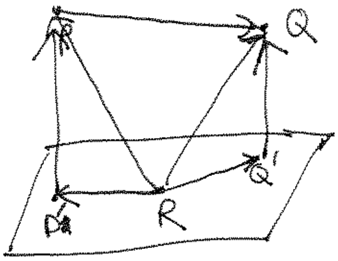
d) FALSKT $(1,2,3)$ är en normalvektor till planet.

e) FALSKT En vänsterinvers V skulle vara av typ 3×2.
Ty Kolonn$(VA) \subseteq$ Span$\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\p\end{bmatrix}\right)$ vilket har max rank 2.
Alltså kan ej $VA = I$

f) FALSKT f's avbildningsmatris ska uppfylla $A\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}_{=:B} = \underbrace{\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}}_{=:C}$

$|B| = \begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Alltså finns entydig $A = CB^{-1}$.
Alltså finns bara en linjär avbildning med de önskade egenskaperna.

6



Tag R godtycklig punkt i Π.

Obs: $\vec{PQ} = \vec{RQ} - \vec{RP} = \vec{RQ'} + \vec{Q'Q} - (\vec{RP'} + \vec{P'P}) =$
$\vec{RQ'} - \vec{RP'} + \vec{Q'Q} - \vec{P'P} =$
$\underbrace{\vec{P'Q'}}_{\parallel \text{ med } \Pi} + \underbrace{\vec{Q'Q} - \vec{P'P}}_{\perp \text{ mot } \Pi}$

Avstånd $(P,Q) = |\vec{PQ}|$ Avstånd $(P',Q') = |\vec{P'Q'}|$

Obs: $|\vec{PQ}|^2 = |\vec{P'Q'} + (\vec{Q'Q} - \vec{P'P})|^2 = |\vec{P'Q'}|^2 + \underbrace{2\vec{P'Q'}\cdot(\vec{Q'Q} - \vec{P'P})}_{=0 \text{ ty } \vec{P'Q'} \parallel \text{ med } \Pi,\ \vec{Q'Q}-\vec{P'P} \perp \text{ mot } \Pi} + |\vec{Q'Q} - \vec{P'P}|^2$

$= |\vec{P'Q'}|^2 + \underbrace{|\vec{Q'Q} - \vec{P'P}|^2}_{\geq 0}$

Alltså $|\vec{PQ}| \geq |\vec{P'Q'}|$
Likhet råder då $\vec{Q'Q} - \vec{P'P} = 0$, dvs $\vec{PQ}$ parallell med Π

---

7 Se Sparr, Sats 4, Lemma 2, s 87

---

8 Se Sparr, Sats 9, s 179