MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2018-08-27 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen | Telefonvakt: Carl Lundholm
Telefon: 031-772 67 92

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}$.

(a) Avgör om $\mathbf{b}$ ligger i kolonnrummet till A.

(b) Lös ekvationssystemet $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$. (7 p)

2. Beräkna determinanten av $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. (6 p)

3. Låt P vara ett parallellogram. Visa att sidorna i P är lika långa (d v s P är en romb) om och endast om diagonalerna i P är vinkelräta. (6 p)

4. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 p. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (6 p)

(a) Antag att $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$. Då spänner $\mathbf{u}$, $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + \mathbf{w}$ upp $\mathbb{R}^3$.

(b) Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ har en vänsterinvers.

(c) Antag att A är en (4×6)-matris av rang 2. Då är alla underdeterminanter till A av ordning 4 lika med 0.

(d) Det finns polynom av grad 7 med reella koefficienter som har exakt 5 reella nollställen (räknade med multiplicitet).

(e) Vektorn $(1, 1, -1)$ ligger i nollrummet till $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(f) Låt A och B vara $(n \times n)$-matriser. Antag att $|AB| = 0$. Då gäller att $|A| = 0$ eller $|B| = 0$.

5. Låt $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vara avbildningen $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, där (y_1, y_2, y_3, y_4) definieras genom

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}.$$

Avgör om f är en linjär avbildning och bestäm i så fall dess avbildningsmatris. (6 p)

6. Låt $P = (1, 0, -1)$ och $Q = (3, 2, 3)$. Bestäm alla tänkbara punkter R i planet $\Pi = \{x - 3y + z = 0\}$ så att triangeln med hörn i P, Q och R är rätvinklig. (7 p)

7. (a) Visa att matrismultiplikation är associativ, det vill säga att $(AB)C = A(BC)$.

(b) Visa att kryssprodukt inte är associativ, det vill säga att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

i allmänhet. (6 p)

8. (a) Låt $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$. Givet $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, låt

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}, \quad \mathbf{u}^{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}'.$$

Visa att $\mathbf{u}^{\perp}$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$.

(b) Använd detta för att visa att varje vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ har en entydig uppdelning

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^{\perp},$$

där $\mathbf{u}'$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}^{\perp}$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$. (6 p)

Lycka till!

Elizabeth