MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2018-10-27 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen | Telefonvakt: Oskar Allerbo
Telefon: 031-772 67 92

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. (a) Beräkna determinanterna $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$ och $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.

(b) Hur många lösningar har ekvationssystemen

$$\left\{\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 &= 2 \end{aligned}\right. \quad \text{respektive} \quad \left\{\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}\right. ?$$

(6p)

2. (a) Låt $p(z) = z^3 - z^2 + 9z - 9$ och $q(z) = z^2 - 3z + 2$. Skriv p och q på formen $c(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$, där $c, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ är komplexa tal.
Tips: p har åtminstone ett rent imaginärt nollställe.

(b) Lös ekvationssystemet $\left\{\begin{aligned} z^3 - z^2 + 9z - 9 &= 0 \\ z^2 - 3z + 2 &= 0 \end{aligned}\right.$. (6 p)

3. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (7 p)

(a) Nollrummet till $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 2 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ är $\{\mathbf{0}\}$.

(b) För alla vektorer $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \in \mathbb{R}^3$ gäller att

$$(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \times (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_4) + (\mathbf{u}_4 \times \mathbf{u}_3) \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_1) = \mathbf{0}.$$

(c) Antag att A, B och C är (3×3)-matriser sådana att $AB = AC$. Då är $B = C$.

(d) Låt P vara parallellepipeden som spänns av vektorerna $(1, -2, 3)$, $(4, 7, 0)$ och $(2, 0, 4)$. Då är volymen av P lika med $24/5$.

(e) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara moturs rotation av $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ med θ radianer. Låt A vara avbildningsmatrisen till f. Då är $\det(A) = 1$.

(f) Antag att A är en (4×3)-matris vars rang är 3. Då är kolonnerna i A linjärt oberoende.

(g) Antag att A och B är $(n \times n)$-matriser sådana att $AB = I$. Då gäller att $BA = I$.

4. Betrakta de linjära avbildningarna

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{u} \mapsto$ ortogonal projektion av $\mathbf{u}$ på $(1, 0, 0)$,

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto t(0, 1, 0)$ och

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ roterad $3\pi/4$ radianer moturs.

Låt A_f, A_g och A_h vara avbildningsmatriserna till f, g respektive h. För var och en av matriserna A_f, A_g och A_h avgör om den har en högerinvers och om den har en vänsterinvers. (6 p)

5. Betrakta planen $\Pi_1 = \{x+2y+3z = 6\}$, $\Pi_2 = \{x+2y+4z = 6\}$ och $\Pi_3 = \{2x+4y+6z = 6\}$ i rummet. Bestäm avstånden mellan Π_1 och Π_2, mellan Π_1 och Π_3 samt mellan Π_2 och Π_3. (7 p)

6. Antag att A är en kvadratisk matris som uppfyller

$$A^2 - 3A + 2I = \mathbf{0}.$$

(a) Är det utifrån den här informationen möjligt att avgöra om A är inverterbar? Gör det i så fall. Visa annars med motexempel att det inte är möjligt.

(b) Är det utifrån den här informationen möjligt att bestämma determinanten av A? Gör det i så fall. Visa annars med motexempel att det inte är möjligt. (6 p)

7. (a) Visa att matrismultiplikation är associativ, det vill säga att $(AB)C = A(BC)$.

(b) Visa att kryssprodukt inte är associativ, det vill säga att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

i allmänhet. (6 p)

8. Låt $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Antag att $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ och är linjärt oberoende. Visa att det för varje $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^n$ finns entydigt bestämda reella tal $u_1, \ldots, u_n$ så att

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{v}_1 + \cdots + u_n\mathbf{v}_n.$$

(6 p)

Lycka till!

Elizabeth