TMA 660 Linjär algebra och geometri 27/10 18, lösningar (1)

1a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} \overset{(-1)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{utveckla längs rad 1}}{=} (-1)^{1+3}\cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$

$6\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 6\cdot(-1)^{1+3}\cdot(-1)\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -6(35-30) = \underline{\underline{-30}}$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}}$ ty 2 rader lika.

b) Låt A = första matrisen vi tog det av B = andra matrisen.
Då första ekv.systemet: $A\mathbb{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ har <u>en</u> unik lösning eftersom det $A \neq 0 \Leftrightarrow A$ inverterbar.

Andra ekvationssystemet $B\mathbb{X} = \mathbb{0}$ har <u>∞</u> många lösningar eftersom det $B \neq 0 \Leftrightarrow B$ ej inverterbar

---

2 a) Givet: p har minst ett rent imaginärt nollställe. Ansätt $z = ai$.
Då $p(ai) = -a^3 i + a^2 + 9ai - 9$ $\quad p(ai) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Im} = 0 \Leftrightarrow -a^3 + 9a = 0 \\ \mathrm{Re} = 0 \Leftrightarrow a^2 - 9 = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow a = \pm 3$

Alltså $p(z)$ har faktorn $(z-3i)(z+3i) = z^2+9$

Dela med denna:

$$\begin{array}{r|l} z-1 & \\ \hline z^3 - z^2 + 9z - 9 & z^2+9 \\ -(z^3 + 9z) & \\ \hline -z^2 - 9 & \end{array}$$

Alltså $\underline{p(z) = (z-3i)(z+3i)(z-1)}$

$q(z)$ — kvadratkomplettera, gissa rötter, eller se direkt att
$\underline{q(z) = (z-2)(z-1)}$

b) $\begin{cases} z^3 - z^2 + 9z - 9 = 0 \\ z^2 - 3z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(z) = 0 \\ q(z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $z = 1,\ z = \pm 3i$ och $z = 1\ \ z = 2$ $\Leftrightarrow \underline{z = 1}$ (enda gemensamma lösn.)

---

3 a) FALSKT (nollity $A = 4 - \text{rang}(A) \geq 4 - 3 \geq 1$)

b) SANT ty $(u_4 \times u_3) \times (u_2 \times u_1) = (-1)^2 (u_3 \times u_4) \times (u_1 \times u_2) = -(u_1 \times u_2) \times (u_3 \times u_4)$

c) FALSKT Tag t ex $A = \mathbb{0}$. Då är $AB = AC$ för alla val av B, C.

d) FALSKT $\text{Vol}(P) = \pm \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ heltal ty heltal i determinanten

e) SANT $\det A = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

f) SANT $\text{rang } A = 3 \Leftrightarrow 3$ linjärt oberoende kolonner

g) SANT För kvadratiska matriser är varje högerinvers en vänsterinvers.

invers $\iff f$ bijektiv

4) Minns A_f har vänsterinvers $\iff f$ injektiv

högerinvers $\iff f$ surjektiv

Om A_f $n\times n$ $\iff f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ så har A h-invers omm A har v-invers.

f: ej surjektiv ty $f(\mathbb{R}^3)=$ linjen $t(1,0,0)$ $t\in\mathbb{R}$.

Alltså A_f saknar högerinvers och eftersom A_f 3×3 så saknar A_f vänsterinv.

g: ej surjektiv $f(\mathbb{R})=$ linjen $t(0,1,0)$ $t\in\mathbb{R}$. Alltså A_g saknar högerinvers

injektiv ty $g(t)=g(t') \iff (0,t,0) \iff (0,t',0) \iff t=t'$

Alltså har A_g vänsterinvers.

h: bijektiv, inversen är $h^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $x\mapsto x$ roterad $\frac{3\pi}{4}$ rad medurs

Alltså har A_h invers speciellt har A_h höger- och vänsterinvers.

---

5) Minns avstånd$(\Pi_j,\Pi_k)=$ minsta avstånd mellan $P\in\Pi_j$ och $Q\in\Pi_k$.

Speciellt är avstånd$(\Pi_j,\Pi_k)=0$ omm Π_j och Π_k skär.

För att avgöra om planen skär, hitta normalvektorer:

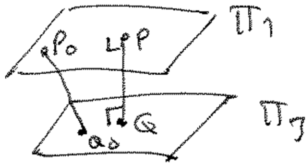
Minns: $n=(a,b,c)\perp\Pi=\{ax+by+cz=d\}$

Alltså $n_1=(1,2,3)\perp\Pi_1$, $n_2=(1,2,4)\perp\Pi_2$, $n_3=(2,4,6)\perp\Pi_3$

Obs $n_3=2n_1$ så $n_1 \parallel n_3$ men n_2 ej parallell med n_1, n_3.

$\implies$ avstånd$(\Pi_1,\Pi_2)=0$, avst.$(\Pi_2,\Pi_3)=0$

Återstår att bestämma avstånd(Π_1,Π_3).



Minns avstånd mellan $P\in\Pi_1$ och $Q\in\Pi_3$ är som minst om $\overrightarrow{PQ}\perp\Pi_1,\Pi_3$.

För att hitta $\overrightarrow{PQ}$ ta $P_0\in\Pi_1$ & $Q_0\in\Pi_3$. Då är $\overrightarrow{PQ}$ ortogonal proj av $\overrightarrow{P_0Q_0}$ på n_1 och alltså:

$$\text{avstånd}(\Pi_1,\Pi_3)=\left|\begin{matrix}\text{orto proj av}\\ \overrightarrow{P_0Q_0}\text{ på } n\end{matrix}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{P_0Q_0}\cdot n_1}{|n_1|^2}n_1\right| = \frac{|\overrightarrow{P_0Q_0}\cdot n_1|}{|n_1|}$$

Kan ta $P_0=(1,1,1)\in\Pi_1$ och $Q_0=(0,0,1)\in\Pi_2$. Då $\overrightarrow{P_0Q_0}=(-1,-1,0)$

$\implies \overrightarrow{P_0Q_0}\cdot n_1=(-1,-1,0)\cdot(1,2,3)=-3$, $|n_1|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$

avstånd$(\Pi_1,\Pi_3)=\frac{|-3|}{\sqrt{14}}=\underline{\frac{3}{\sqrt{14}}}$

---

6 a) $A^2-3A+2I=0 \iff \frac{1}{2}(3I-A)A=I \iff$ A inverterbar med invers $\frac{1}{2}(3I-A)$

b) Ej möjligt. Mdtex $n=1$. $A=[a]$. Då $A^2-3A+2I=0 \iff a^2-3a+2=0 \iff$ $a=2$ eller $a=1 \iff \det A=2$ eller $\det A=1$

---

7 a) Se Sparr kap 7.2 b) Se Sparr kap 5

---

8) Se Sparr kap 6 + ant. på hemsidan