MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Tentamen

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa

Datum: 2019-01-07 kl. 14.00 - 18.00

Telefonvakt: Johannes Borgqvist

Telefon: 031-772 5325

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 5 \\ 7 & 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

(a) Beräkna determinanterna av A och B.

(b) Bestäm kolonnrummen till A och B.

(c) Bestäm rang och nolldimension för A och B.

(d) Låt $f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ och $f_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vara de linjära avbildningar vars avbildningsmatriser är A respektive B. Avgör om f_A och f_B är surjektiva, injektiva och bijektiva. (7 p)

2. Låt P vara ett parallellogram. Visa att diagonalerna i P är lika långa om och endast om P är en rektangel. (4 p)

3. För f given nedan avgör om f är linjär och bestäm i så fall avbildningsmatrisen.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto |\mathbf{x}|$.

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{u} \mapsto$ ortogonal projektion av $\mathbf{u}$ på $(1, 2, 3)$. (7 p)

4. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (6 p)

(a) Antag att A och B är (2×2)-matriser. Då gäller $(A + B)(A + B) = A^2 + 2AB + B^2$.

(b) Antag att A är en (5×4)-matris av rang 4. Då har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oändligt många lösningar.

(c) Vektorerna $(1, 2, 3)$, $(3, 4, 5)$, $(1, 0, 2)$ och $(3, 3, 4)$ är linjärt beroende.

(d) Polynomet $p(z) = z^6 + z^5 - 3z^2 + 4 = 0$ har exakt fem reella nollställen.

(e) För alla vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ gäller att $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

(f) Antag att $\mathbf{y}$ och $\mathbf{z}$ båda är lösningar till $A\mathbf{x} = (1, 1, 1)$. Då är alla linjärkombinationer av $\mathbf{y}$ och $\mathbf{z}$ lösningar till $A\mathbf{x} = (1, 1, 1)$.

5. Antag att A är en kvadratisk matris som uppfyller

$$A^2 + A = \mathbf{0}.$$

(a) Är det utifrån den här informationen möjligt att avgöra om A är inverterbar? Gör det i så fall. Visa annars med motexempel att det inte är möjligt.

(b) Är det utifrån den här informationen möjligt att bestämma determinanten av A? Gör det i så fall. Visa annars med motexempel att det inte är möjligt. (6 p)

6. Låt ℓ vara linjen i $\mathbb{R}^2$ given av ekvationen $x_1 = 0$ och låt P vara punkten $(7, 0)$. Vidare låt $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning vars avbildningsmatris är $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Kommentar En sådan avbildning kallas *skjuvning*.

(a) Vad är avståndet mellan P och ℓ?

(b) Visa att bilden $f_A(\ell) = \{f_A(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \ell\}$ av ℓ under f_A är linjen given av ekvationen $x_1 - x_2 = 0$.

(c) Vad är avståndet mellan P och $f_A(\ell)$?

(d) Bestäm avbildningsmatrisen för $f_A^n = f_A \circ f_A \circ \cdots \circ f_A$ (n gånger).

(e) Vad är bilden av $f_A^n(\ell)$?

(f) Vad är avståndet mellan P och $f_A^n(\ell)$? Vad händer då $n \to \infty$? (8 p)

7. Låt A vara en $n \times n$-matris.

(a) Definiera vad det innebär att A är inverterbar.

(b) Visa att om A har en invers så är denna entydigt bestämd. (6 p)

8. Betrakta $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Antag att $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Visa att det för varje vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ finns en entydigt bestämd uppdelning

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^{\perp},$$

där $\mathbf{u}'$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}^{\perp}$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$. (6 p)

Lycka till!
Elizabeth