1\. a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 5 \\ 7 & 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \\ 7 & 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 7 & 4 & 4 \end{vmatrix} =$

utv. kolonn 3 — faktor 2 kolonn 2 & 3 — Sarrus

$4(-12+28+16-24-32+7) = 4\cdot(-17) = \underline{\underline{-68}}$

$\det B = \underline{\underline{0}}$ ty kolonn 1 & 3 är lika.

b) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ A's kolonner linjärt oberoende $\Leftrightarrow$ Kolon $A = \underline{\underline{\mathbb{R}^4}}$

Obs kolonn 1, 2, 4 i B är samma som i A $\Rightarrow$ dessa linjärt oberoende ty kolonnerna i A är. Kolonn 3 i B = kolonn 1.

Alltså Kolon B = $\underline{\underline{\text{span}\left((1,3,5,7),(2,4,0,8),(1,2,5,8)\right)}}$

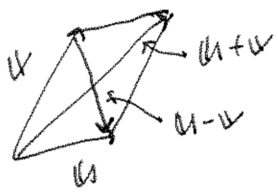
c) Kolon $A = \mathbb{R}^4 \Rightarrow$ rang $A = \underline{\underline{4}}$, nolldim $A = \underline{\underline{0}}$

Kolon B = span av 3 linjärt oberoende vektorer $\Rightarrow$ rang $B = \underline{\underline{3}}$ nolldim $B = 4-3 = \underline{\underline{1}}$

d) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ $\underline{\underline{f_A \text{ inj, surjektiv \& bijektiv}}}$

$\det B = 0 \Leftrightarrow$ $\underline{\underline{f_A \text{ ej — " —}}}$

2\. P



Antag att P spänns av u & v. Då definieras diagonalerna av $u+v$ & $u-v$.

P rektangel betyder per def att sidorna är vinkelräta.

dvs $u \perp v \Leftrightarrow u\bullet v = 0 \Leftrightarrow$

$|u+v|^2 = (u+v)\bullet(u+v) = u\bullet u + 2u\bullet v + v\bullet v = u\bullet u - 2u\bullet v + v\bullet v = (u-v)^2 = |u-v|^2$

$\Leftrightarrow |u+v| = |u-v|$, dvs diagonalerna är lika långa.

3 a) Ej linjär. Tag t ex $x = (1,0,0)$ och $x' = -x = (-1,0,0)$.

Då $f(x+x') = f(0) = |0| = 0$ men

$f(x)+f(x') = |x|+|x'| = 1+1 = 2$ Alltså $f(x+x') \neq f(x)+f(x')$ i allmänhet. Alltså ej linjär.

b) Minns: orto proj av u på $v = (1,2,3)$ ges av $\frac{u\bullet v}{|v|^2}v$

Identifiera v med kolonnvektorn $\begin{bmatrix} \vdots \\ v \\ \vdots \end{bmatrix}$ och skalären λ med $[\lambda]$.

Kan då skriva $u\bullet v = v\bullet u = v^T u$ och $\lambda v = [v][\lambda]$

Alltså $f(u) = \frac{1}{|v|^2} u\bullet v\, v = \frac{1}{|v|^2} v v^T u$. Alltså f linjär m avb.matris

$A = \frac{1}{|v|^2} v v^T$. Nu $|v|^2 = 1^2+2^2+3^2 = 14$ $\quad v v^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Alltså $A = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

4 a) FALSKT ty $AB \neq BA$ i allmänhet.

b) FALSKT ty nolldim A = # kolonner − rang $A = 4-4 = 0$

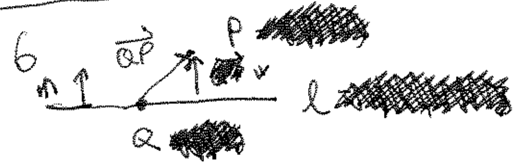
c) SANT 4 vektorer i $\mathbb{R}^3$ är alltid linjärt beroende

d) FALSKT polynom med reella koeff, om z icke nollställe så $\bar{z}$ nollställe
om p grad 6 kan då inte ha exakt ett icke-reellt nollställe

e) FALSKT t.ex. $e_2 \times (e_1 \times e_2) = e_2 \times e_3 = e_1$ om e_1, e_2, e_3 HON-bas

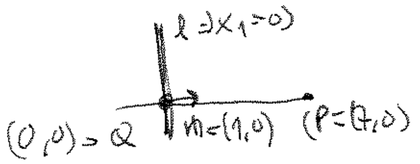
f) FALSKT om $Ay = (1,1,1)$ & $Az = (1,1,1)$ så $A(y+z) = (2,2,2)$ t.ex

5 $A = 0$ och $A = -I$ uppfyller båda $A^2 + A = 0$. Alltså är det inte möjligt att avgöra om A är inverterbar, och därmed inte heller möjligt att bestämma determinanten.

6 

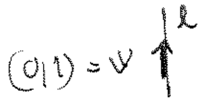
Avstånd mellan P & l i $\mathbb{R}^2$
Tag $Q \in l$, [redacted] & $n \perp l$
Då avst. (P, l) = längd av orto proj av $\overrightarrow{PQ}$ på n
$= \left| \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot n}{|n|^2} n \right| = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot n}{|n|}$

a) $l = \{x_1 = 0\}$, en normalvektor ges t ex av $(1,0)$, välj $Q = (0,0)$



avst. $(P, l) = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot n}{|n|} = \frac{(7,0) \cdot (1,0)}{|(1,0)|} = \frac{7}{1} = \underline{\underline{7}}$

b) Tag $v \parallel l$, t.ex $v = (0,1)$. Då $Av = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$



$l = \{tv, t \in \mathbb{R}\}$ avbildas på $l^1 = \{tAv, t \in \mathbb{R}\} = \{t(1,1), t \in \mathbb{R}\}$
Skriv l^1 på affin form: $x_1 = t$, $x_2 = t$ så $l^1 = \{x_1 - x_2 = 0\}$

c) en normalvektor till $l^1 = \{x_1 - x_2 = 0\}$ är t.ex $n = (1,-1)$, $Q = (0,0) \in l^1$
avst. $(P, l^1) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot n|}{|n|} = \frac{|(7,0) \cdot (1,-1)|}{|(1,-1)|} = \underline{\underline{\frac{7}{\sqrt{2}}}}$

d) Påst $\underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$ ok om $n = 1$. Antag sant om $n = p$:
Då $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{p+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alltså sant för $n = p+1$
Påst följer med induktion. Avb.matrisen för f_A^n är $\underline{\underline{A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}$

e) $f_A^n(l) = f_A^n(\{tv, t \in \mathbb{R}\}) = \{tA^n v, t \in \mathbb{R}\} = \left\{t \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\} =$
$\left\{t \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\}$. Bilden är $\underline{\underline{\text{linjen } l^n = t(n,1),\ t \in \mathbb{R}}}$

f) En normalvektor till l^n är $n = (1,-n)$ t.ex. $Q = (0,0) \in l^n$
avst. $(P, l^n) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot n|}{|n|} = \frac{(7,0) \cdot (1,-n)}{|(1,-n)|} = \underline{\underline{\frac{7}{\sqrt{1+n^2}}}} \longrightarrow 0$ då $n \to \infty$

7 Se Sparr kap 7.5 (Def 5 och Lemma 2)

8 Se Sparr kap 4.1 (Sats 1) och extramaterial på hemsidan