**MATEMATIK** | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2019-08-26 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen | Telefonvakt: Olof Giselsson
Telefon: 031-772 5325

# TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

**1.** (a) Beräkna determinanten av $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$. (6 p)

**2.** Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm nollrummen och kolonnrummen till $A$, $B$ och $C$. Beskriv dessa geometriskt.

(6 p)

**3.** Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara funktionen $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Avgör om $f$ är linjär. Bestäm i så fall dess avbildningsmatris. (6 p)

**4.** Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock $\geq 0$. (6 p)

(a) Antag att $A$ och $B$ är $(m \times n)$-matriser sådana att $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Då är $A = B$.

(b) Avståndet mellan planen $\Pi_1 = \{x + y + z = 0\}$ och $\Pi_2 = \{x + y + z = 1\}$ är 1.

(c) Vektorerna $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 2, 3)$, $(0, 0, 1, 2)$ och $(0, 0, 0, 1)$ är linjärt oberoende.

(d) Det finns linjära ekvationssystem som har exakt två lösningar.

(e) Determinanten av $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ är 3.

(f) Den komplexa exponentialfunktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^z$ är surjektiv.

**5.** Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling i planet $\Pi = \{3x + 4y + 5z = 0\}$ och låt $A$ vara avbildningsmatrisen till $f$. Bestäm för vilka $\lambda \in \mathbb{R}$ det finns $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ så att $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. För vart och ett av dessa $\lambda$ beskriv vilka vektorer $\mathbf{x}$ som uppfyller $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. (6 p)

**6**. (a) Bestäm alla polynom av grad $\leq 2$, det vill säga på formen $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, vars graf $\{(x, p(x))\}$ går genom punkterna $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 3)$ och $P_3 = (3, 4)$.

(b) Bestäm alla polynom av grad $\leq 3$, det vill säga på formen $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, vars graf $\{(x, p(x))\}$ går genom punkterna $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 3)$ och $P_3 = (3, 4)$. (6 p)

**7**. (a) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer i rummet. Definiera vektorprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

(b) Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vara en högerorienterad ON-bas i rummet. Visa att $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$. (6 p)

**8**. (a) Låt $A$ vara en $(m \times n)$-matris, där $m \geq n$. Visa att en lösning till normalekvationen

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \tag{1}$$

minimerar $|A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$.

(b) Finns det alltid en entydig lösning till (1)? Motivera ditt svar. Om svaret är nej räcker det med motexempel. (8 p)

Lycka till!
Elizabeth