TMA 660 Linjär algebra och geometri, 26/8 19, lösningar

1) a)
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \overset{(-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \overset{(-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{utv. rad 3}}{=} (-1)^{3+1}\cdot 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{utv. kol. 2}}{=}$$

$$1\cdot(-1)^{2+2}\cdot 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{utv. kol. 1}}{=} 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot(-1)\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2(-5+4) = -2\cdot(-1) = \underline{\underline{2}}$$

b) Obs, ekv. systemet kan skrivas $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Eftersom $\det A \neq 0$ har detta endast den triviala lösningen $\underline{\underline{\mathbf{x}=\mathbf{0}}}$.

2) Minns $NR(A) = \{\mathbf{x}$ så att $A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$, Kolonn(A) = span (kolonner i A)
Eftersom A, B, C 2×3, så nollrum i $\mathbb{R}^3$, kolonnrum i $\mathbb{R}^2$.

Nollrum:
- $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ uppfylls av alla $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, dvs $\underline{\underline{NR(A)=\mathbb{R}^3, \text{ rummet självt}}}$
- $B\mathbf{x}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2+x_3=0 \\ x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=x_3=0 \\ x_1=t \quad t\in\mathbb{R} \end{cases}$

  Alltså $\underline{\underline{NR(B) = \text{linjen } l: t(1,0,0)\ t\in\mathbb{R}, \text{ en linje i rummet}}}$
- $C\mathbf{x}=\mathbf{0} \Leftrightarrow x_1+x_2+x_3=0$, dvs $\underline{\underline{NR(C) = \text{planet } \{x_1+x_2+x_3=0\}}}$ $\underline{\underline{\text{– ett plan i rummet}}}$.

Kolonnrum:
- $\underline{\underline{\text{Kolonn}(A)}} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \underline{\underline{\{\mathbf{0}\}, \text{ en punkt i planet } \mathbb{R}^2}}$
- $\underline{\underline{\text{Kolonn}(B)}} = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \underline{\underline{\mathbb{R}^2}}$, dvs $\underline{\underline{\text{planet självt}}}$

  2 linjärt ober. vektorer spänner upp $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^2$
- $\underline{\underline{\text{Kolonn}(C)}} = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \underline{\underline{\text{linjen } t(1,1)\ t\in\mathbb{R}}}$

  $\underline{\underline{\text{– en linje i planet.}}}$

3)
$$f(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}x_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}x_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}x_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})}_{A_{11}}x_1 - \underbrace{(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})}_{A_{21}}x_2 + \underbrace{(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})}_{A_{31}}x_3$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Det följer att $\underline{\underline{f(\mathbf{x}) \text{ är linjär}}}$ (eftersom den är på formen matris $\cdot\,\mathbf{x}$)

och avbildningsmatrisen är:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22} \end{bmatrix}}}$$

TMA 660 26/8 19

4 a) SANT, obs tag $\mathbb{x} = \mathbb{e}_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (plats j), då $A\mathbb{x} = B\mathbb{x} \Leftrightarrow$ j:te kolumner samma

b) FALSKT, Tag t ex $P = (0,0,0) \in \Pi_1$, $Q = \frac{1}{3}(1,1,1) \in \Pi_2$. Då
avstånd $(\Pi_1, \Pi_2) \leq$ avstånd $(P, Q) = \frac{1}{3}|(1,1,1)| = \frac{1}{3}\sqrt{3} < 1$

c) SANT, ty $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

d) FALSKT, linjära ekvationssystem har 0, 1, eller ∞ många lösn

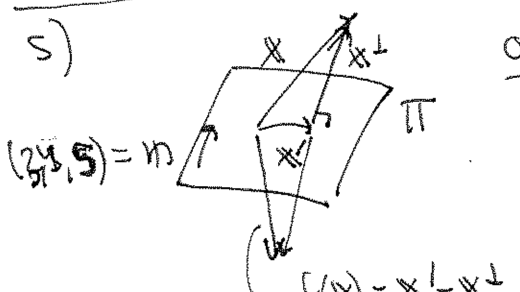
e) FALSKT, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{heltal}} = 2 \cdot \text{heltal}$, alltså ej $= 3$

f) FALSKT, ty för alla $z \in \mathbb{C}$ gäller $e^z \neq 0$.

7) a) se kap 5.2 b) se kap 5.4) Sparr

8) se kap 7.8 Sparr + hemsidan

5)



Obs (minns) $\mathbb{x}$ har entydig uppdelning $\mathbb{x} = \mathbb{x}' + \mathbb{x}^\perp$
där $\mathbb{x}'$ parallell med Π, $\mathbb{x}^\perp$ ortogonal mot Π
Då $f(\mathbb{x}) = \mathbb{x}' - \mathbb{x}^\perp$

Obs: $f(\mathbb{x}) = \mathbb{x}' - \mathbb{x}^\perp \parallel \mathbb{x}' + \mathbb{x}^\perp = \mathbb{x}$ omm $\mathbb{x}' = 0$ eller $\mathbb{x}^\perp = 0$
Om $\mathbb{x}' = 0$ så $f(\mathbb{x}) = -\mathbb{x}$ Om $\mathbb{x}^\perp = 0$ så $f(\mathbb{x}) = \mathbb{x}$.

Alltså $\underline{\lambda = \pm 1}$

För $\underline{\lambda = 1} \Leftrightarrow \mathbb{x}^\perp = 0 \Leftrightarrow$ $\underline{\mathbb{x} \text{ parallell med } \Pi}$
$\underline{\lambda = -1} \Leftrightarrow \mathbb{x}' = 0 \Leftrightarrow$ $\underline{\mathbb{x} \text{ ortogonal mot } \Pi}$ ($\mathbb{x}$ på formen $t\mathbb{n} = t(3,4,5)$ $t \in \mathbb{R}$)

6) b) Att grafen till $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ går genom P_1, P_2, P_3 innebär:

$$\begin{cases} P_1 = (1,2): & a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 2 \\ P_2 = (2,3): & 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 3 \\ P_3 = (3,4): & 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 4 \end{array}\right] (-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 26 & 2 \end{array}\right] (-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 0 \end{array}\right] \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array}$$

[Sätt $a_3 = t$ då $a_2 = -6t$ (III) & (II): $a_1 + 3(-6t) + 7t = 1 \Leftrightarrow a_1 = 1 + 11t$
& (I) $a_0 + (1 + 11t) + (-6t) + t = 2 \Leftrightarrow a_0 = 1 - 6t$]

$\Leftrightarrow [a_0, a_1, a_2, a_3] = [1 - 6t, 1 + 11t, -6t, t]$, dvs $\underline{p(x) = tx^3 - 6tx^2 + (1 + 11t)x + 1 - 6t,\ t \in \mathbb{R}}$

a) motsvarar att $a_3 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow a_2 = 0$, $a_1 = 1$, $a_0 = 1$,
dvs $\underline{p(x) = x + 1}$. (Obs, detta kan ses direkt. Se direkt att $p(x) = x + 1$ går genom punkterna & vet att 3 punkter entydigt bestämmer p.