TMA671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Tentamen

Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.

Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5. Upp till 10 bonuspoäng från bonusuppgifter får tillgodoräknas.

Lycka till!

Geir

1. **(10 p)**

Låt

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) För vilka α är $A(\alpha)$ singulär? (2 p)

(b) Vad är dimensionen till nollrummet till $A(\alpha)$ när matrisen är singulär? (1 p)

(c) Sätt $\alpha = 3$ och lös ekvationssystemet (3 p)

$$A(3)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(d) När vi räknar med flyttal, kan det vara ett problem att α är nära ett värde α_0 så att $A(\alpha_0)$ är singulär. Förklara varför. (2 p)

(e) Vad krävs av två matriser L och U för att de ska vara en LU-faktorisering till A? (2 p)

2. **(7 p)**

(a) Förklara vad som menas med begreppen bas och dimension till ett linjärt rum W. (Du kan anta dimensionen är ändlig.) (2 p)

(b) Ett linjärt rum W spänns upp av vektorerna $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$. Vad kan du säga om dimensionen till W? (2 p)

(c) Låt U och W vara ändligdimensionella linjära rum, och $T\colon U \to W$ en linjär avbildning så att värdesrummet till T, $V(T)$, är lika med W. Vad kan du säga om dimensionerna till U och W? (3 p)

3. **(7 p)**

I den här uppgiften betraktar vi $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^m$, där $n \geq m$, med standardskalärprodukt $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\top \mathbf{v}$. $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ är en matris med rang m.

(a) Förklar vad vi menar med att två underrum av $\mathbb{R}^n$ är ortogonala komplement till varandra. (2 p)

(b) Visa att nollrummet till $A^\top$ är det ortogonala komplementet till kolonnrummet till A i $\mathbb{R}^n$. (2 p)

Ortogonalprojektionen av en vektor $\mathbf{v}$ på et underrum U är den vektor $P\mathbf{v}$ i U så att $\mathbf{v} - P\mathbf{v}$ är i Us ortogonala komplement.

(c) Härled formeln för ortogonalprojektionen på kolonnrummet till A, (3 p)

$$P\mathbf{v} = A(A^\top A)^{-1}A^\top \mathbf{v}.$$

4. **(10 p)**

Här kommer 5 par av påstående, i par (P1) och (P2). Uppgiften består i följande: Anta att påstående (P1) är sant och avgör om påstående (P2) *måste vara sant*, *kan vara sant* eller *inte kan vara sant*. Ange motivering till dina svar.

(a) **(P1)** För en matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, gäller det att 2 är ett egenvärde till A.
(P2) $(A-2I)^n = 0$. (2 p)

(b) **(P1)** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är symmetrisk.
(P2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_A = \mathbf{u}^\top A\mathbf{v}$ är ett skalärprodukt på $\mathbb{R}^n$. (2 p)

(c) **(P1)** För matrisen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ finns en ortonormerad (i standardskalärproduktet) bas för $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer till A.
(P2) A är symmetrisk. (2 p)

(d) **(P1)** En symmetrisk $n \times n$-matris har egenvärdena $-2, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$ och 3 (och ingen andra egenvärder).
(P2) Det gäller att $\mathbf{u}^\top A\mathbf{u} \le 3\mathbf{u}^\top\mathbf{u}$ för alla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. (2 p)

(e) **(P1)** $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är egenvektorer till en matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
(P2) $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ är en egenvektor till A. (2 p)

5. **(8 p)**

I den här uppgiften ska vi beräkna $\sqrt{S}$ genom att lösa ekvationssystemet $x^2 = S$ med en iterativ algoritm.

(a) Visa att $\sqrt{S}$ är ett fixpunkt för funktionen $g_0(x) = \frac{S}{x}$ (1 p)

(b) Kommer fixpunktsiterationen $x_{k+1} = g_0(x_k)$ att konvergera mot $\sqrt{S}$? Varför / varför inte ? (2 p) Den babyloniska metoden är en fixpunktiteration för kvadratrötter som använder funktionen

$$g_1(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{S}{x})$$

(c) Beräkna en approximation till $\sqrt{2}$ genom att göra två iterationer med den babyloniska metoden och startgissningen $x_0 = 1$. (2 p)

(d) Visa att den babyloniska metoden är ekvivalent med Newtons metod för ekvationen $x^2 - S = 0$. (3 p)

6. **(8 p)**

Vi ska approximera en funktion $f(x)$ i intervallet $[0, 4]$. Tabellen ger funktionens värde i några punkter i intervallet:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.00	0.50	1.50	0.75	0.00

(a) Beräkna två interpolationspolynom: ett som interpolerar f i $x = 0$, $x = 1$ och $x = 2$, och ett som interpolerar f i $x = 2$, $x = 3$ och $x = 4$. Polynomen du beräknar ska ha lägsta möjliga grad. (3 p)

Polynomen du beräknade i a) utgör ett styckvis polynom $g(x)$ som interpolerar f.

(b) Är g en spline? Varför/varför inte? (1 p)

(c) Beräkna en approximation till $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$ genom att använda Simpsons formel på två delintervall. (2 p) Uppgiven: Simpsons regel på ett intervall med trunkeringsfel:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)) - \frac{f^{(4)(\xi)}}{2880}(b-a)^5$$

(d) Förklara varför approximationen du beräknade i c) är lika med $\int_0^4 g(x)\mathrm{d}x$. (2 p)

7. **(4 p)**

En dämpad harmonisk oscillators rörelse $x(t)$ uppfyller differentialekvationen

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

(a) Skriv differentialekvationen som en förste ordens differentialekvation

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

där $\mathbf{y}$ och $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ kan vara vektorer. (2 p)

(b) Sätt $\frac{k}{m} = 1$, $\frac{c}{m} = 2$ och lös differentialekvationen i (a) numerisk med två steg framåt Euler. Använd begynnelsesvärdena

$$\begin{cases} x(0) &= 2, \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) &= -1. \end{cases}$$

och steglängd $h = \frac{1}{2}$. (2 p)

Om du inte har löst (a), använd i stället följande differentialekvationssystem.

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = y_2, \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = -y_1 + y_2, \\ y_1(0) = 2, \\ y_2(0) = -1. \end{cases}$$

8. **(6 p)**

Vi betraktar ett optimeringsproblem

$$\min_{[x,y]^\top \in \mathbb{R}^2} x^2 - 2x + 2xy + 2y^2$$

(a) Beräkna steepest descent-riktningen i $\mathbf{x}_0 = [0, 0]^\top$. (1 p)

(b) En annan sökrikting dannar en vinkel α med steepest descent-riktningen. För vilka α är sökriktningen en descentriktning? (2 p)

(c) Anta att du använder steepest descent-sökriktning, och att du löser linjesökningsproblemet exakt. Vad är vinkeln mellan två på varandra följande sökriktninger? (3 p)