MATEMATISKA VETENSKAPER | **TMA671 2016**
Chalmers tekniska högskola | **2016–08–26 kl 14:00-18:00**
Examinator: Geir Bogfjellmo Tel: 0725-796742 | **Hjälpmedel: Inga**

TMA671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Lösning

---

1. **(10 p)**

Låt

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) För vilka α är $A(\alpha)$ singulär? (2 p)

Lösning: Två steg Gausselimination ger

$$U(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

Därför är matrisen singulär när $\alpha = 2$.

För senare användning noterar vi också at

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 111 & & \end{pmatrix}$$

är så att $LU(\alpha) = A(\alpha)$.

(b) Vad är dimensionen till nollrummet till $A(\alpha)$ när matrisen är singulär? (1 p)

Lösning: Här får vi endast en fri variabel, därför är $\dim(N(A(2))) = 1$

(c) Sätt $\alpha = 3$ och lös ekvationssystemet (3 p)

$$A(3)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Lösning: Löser i två steg:

$$L\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ger

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

och $U(3)\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ger

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d) När vi räknar med flyttal, kan det vara ett problem att α är nära ett värde α_0 så att $A(\alpha_0)$ är singulär. Förklara varför. (2 p)

Lösning: Vi ser att $U(\alpha)$ har värdet $\alpha - 2$ i position (3,3). När vi löser $U(\alpha)\mathbf{x} = \mathbf{y}$ måste vi dela på $\alpha - 2$. Någon avrundningsfel i y_3 kommer att bli multipliserad med $\frac{1}{\alpha-2}$ när vi beräknar x_3.

(e) Vad krävs av två matriser L och U för att de ska vara en LU-faktorisering till A? (2 p)

Lösning: Det krävs att L är nedåt triangulär, U är uppåt triangulär, och att $LU = A$. Det är normalt att också kräva att L har ettor på diagonalen.

2. **(7 p)**

(a) Förklara vad som menas med begreppen bas och dimension till ett linjärt rum W. (Du kan anta dimensionen är ändlig.) (2 p)

Lösning: En bas till ett linjärt rum W är en uppsättning av vektorer $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ så vektorerna är linjärt oberoende och spänner upp W. Dimensionen till W är antal vektorer i en bas.

(b) Ett linjärt rum W spänns upp av vektorerna $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$. Vad kan du säga om dimensionen till W? (2 p)

Lösning: Vektorerna $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ spänner upp W, men vi vet inte om de är linjärt oberoende, så vi vet inte om de utgör en bas. Om vi väljer ut det största antalet linjärt oberoende vektorer från $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$, så spänner de också ut W, och utgör en bas. Antalet vektorer i basen är högst n, så vi vet at $\dim W \leq n$

(c) Låt U och W vara ändligdimensionella linjära rum, och $T\colon U \to W$ en linjär avbildning så att värdesrummet till T, $V(T)$, är lika med W. Vad kan du säga om dimensionerna till U och W? (3 p)

Lösning: $V(T)$ kan inte innehålla flera linjärt oberoende vektorer än U, så $\dim W = \dim T(V) \leq \dim U$.

3. **(7 p)**

I den här uppgiften betraktar vi $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^m$, där $n \geq m$, med standardskalärprodukt $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\top \mathbf{v}$. $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ är en matris med rang m.

(a) Förklar vad vi menar med att två underrum av $\mathbb{R}^n$ är ortogonala komplement till varandra. (2 p)

Lösning: Det ortogonala komplementet till ett underrum U är definerad som

$$U^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ så att } \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \text{ för alla } \mathbf{u} \in U\}$$

och är ett underrum. Det går att visa att $(U^\perp)^\perp = U$.

(b) Visa att nollrummet till $A^\top$ är det ortogonala komplementet till kolonnrummet till A i $\mathbb{R}^n$. (2 p)

Lösning: Alla vektorer i kolonnrummet till A kan skrivas $A\mathbf{x}$ för någon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Om $\mathbf{v} \in N(A^\top)$, så gäller

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{x}^\top A^\top \mathbf{v} = 0$$

Därför är $N(A^\top) \subseteq V(A)^\perp$. På den andra sidan, om $\mathbf{v}$ är ortogonal på hela kolonnrummet till A, så har vi

$$0 = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{x}^\top A^\top \mathbf{v} = \langle \mathbf{x}, A^\top \mathbf{v} \rangle$$

för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Då $A^\top \mathbf{v}$ är ortognal på alla vektorer i $\mathbb{R}^m$, måste den vara lika nollvektorn. Därför är också $V(A)^\perp \subseteq N(A^\top)$ och det följer att $V(A)^\perp = N(A^\top)$.

Ortogonalprojektionen av en vektor $\mathbf{v}$ på et underrum U är den vektor $P\mathbf{v}$ i U så att $\mathbf{v} - P\mathbf{v}$ är i Us ortogonala komplement.

(c) Härled formeln för ortogonalprojektionen på kolonnrummet till A, (3 p)

$$P\mathbf{v} = A(A^\top A)^{-1}A^\top \mathbf{v}.$$

Lösning: $P\mathbf{v}$ ska vara en vektor i $V(A)$, det innebär att $P\mathbf{v} = A\mathbf{x}$ för någon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Vi ska också ha att $\mathbf{v} - P\mathbf{v}$ är i $V(A)^\perp = N(A^\top)$. Därför:

$$\begin{aligned} 0 &= A^\top(\mathbf{v} - P\mathbf{v}) \\ 0 &= A^\top(\mathbf{v} - A\mathbf{x}) \\ 0 &= A^\top\mathbf{v} - A^\top A\mathbf{x} \\ A^\top A\mathbf{x} &= A^\top\mathbf{v} \end{aligned}$$

Då A har rang m är $A^\top A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ inverterbar, och $\mathbf{x} = (A^\top A)^{-1}A\top\mathbf{v}$, och till slutt

$$P\mathbf{v} = A\mathbf{x} = A(A^\top A)^{-1}A\top\mathbf{v}$$

4. **(10 p)**

Här kommer 5 par av påstående, i par (P1) och (P2). Uppgiften består i följande: Anta att påstående (P1) är sant och avgör om påstående (P2) *måste vara sant*, *kan vara sant* eller *inte kan vara sant*. Ange motivering till dina svar.

(a) **(P1)** För en matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, gäller det att 2 är ett egenvärde till A.
(P2) $(A-2I)^n = 0$. (2 p)
Lösning: *Kan vara sann.* Om till exempel $A = 2I$, gäller det, men om A har ett egenvärde $\lambda \neq 2$ med tillhörande egenvektor $\mathbf{v}$, gäller det att $(A-2^I)^n\mathbf{v} = (\lambda-2)^n\mathbf{v} \neq 0$.

(b) **(P1)** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är symmetrisk.
(P2) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_A = \mathbf{u}^\top A\mathbf{v}$ är ett skalärprodukt på $\mathbb{R}^n$. (2 p)
Lösning: *Kan vara sann.* För att $\langle \cdot, \cdot\rangle_A$ ska vara ett skalärprodukt, måste vi även ha att

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_A = \mathbf{u}^\top A\mathbf{u} > 0$$

för alla $\mathbf{u} \neq 0$. Det vill säga att A måste vara positivt definitt.

(c) **(P1)** För matrisen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ finns en ortonormerad (i standardskalärproduktet) bas för $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer till A.
(P2) A är symmetrisk. (2 p)
Lösning: *Måste vara sann.* Att A har en ortonormerad bas innebär att

$$A = V\Lambda V^\top$$

För en ortogonal matris V och diagonal matris Λ. Då är

$$A^\top = V\Lambda^\top V^\top = V\Lambda V^t op = A$$

(d) **(P1)** En symmetrisk $n\times n$-matris har egenvärdena $-2, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$ och 3 (och ingen andra egenvärder).
(P2) Det gäller att $\mathbf{u}^\top A\mathbf{u} \leq 3\mathbf{u}^\top\mathbf{u}$ för alla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. (2 p)
Lösning: *Måste vara sann.* Enligt spektralsatsen har $\mathbb{R}^n$ en ON-bas bestående av egenvektorer till A, skriver vi $\mathbf{u}$ i en sådan bas får vi

$$\mathbf{u}^\top A\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i\xi_i^2 \leq 3\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 3\mathbf{u}^\top\mathbf{u}$$

där ξ_i är koordinaterna till u i basen

(e) **(P1)** $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är egenvektorer till en matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
(P2) $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ är en egenvektor till A. (2 p)
Lösning: *Kan vara sann.* Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har samma tillhörande egenvärde är det sant, annars inte.

5. **(8 p)**

I den här uppgiften ska vi beräkna $\sqrt{S}$ genom att lösa ekvationssystemet $x^2 = S$ med en iterativ algoritm.

(a) Visa att $\sqrt{S}$ är ett fixpunkt för funktionen $g_0(x) = \frac{S}{x}$ (1 p)
Lösning:

$$g_0(\sqrt{S}) = \frac{S}{\sqrt{S}} = \sqrt{S}$$

(b) Kommer fixpunktsiterationen $x_{k+1} = g_0(x_k)$ att konvergera mot $\sqrt{S}$? Varför / varför inte ? (2 p)

Lösning: Den kommer inte att konvergera (Om vi inte startar med $x_0 = \sqrt{S}$) därför att

$$g_0(g_0(x)) = \frac{S}{S/x} = x$$

som innebär att iterationen vill växla mellan x_0 och $\frac{S}{x_0}$ i det oändliga.

Den babyloniska metoden är en fixpunktiteration för kvadratrötter som använder funktionen

$$g_1(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{S}{x})$$

(c) Beräkna en approximation till $\sqrt{2}$ genom att göra två iterationer med den babyloniska metoden och startgissningen $x_0 = 1$. (2 p)

Lösning:

$$x_1 = g_1(x_0) = \frac{3}{2}$$
$$x_2 = g_1(x_1) = \frac{17}{12}$$

(d) Visa att den babyloniska metoden är ekvivalent med Newtons metod för ekvationen $x^2 - S = 0$. (3 p)

Lösning: Newtons metod är $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ och här är $f(x) = x^2 - S$, $f(x) = 2x$, så

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{x_k^2 - S}{2x_k} \\ &= \frac{x_k^2 + S}{2x_k} \\ &= \frac{1}{2}(x_k + \frac{S}{x_k}) \end{aligned}$$

6. **(8 p)**

Vi ska approximera en funktion $f(x)$ i intervallet $[0, 4]$. Tabellen ger funktionens värde i några punkter i intervallet:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.00	0.50	1.50	0.75	0.00

(a) Beräkna två interpolationspolynom: ett som interpolerar f i $x = 0$, $x = 1$ och $x = 2$, och ett som interpolerar f i $x = 2$, $x = 3$ och $x = 4$. Polynomen du beräknar ska ha lägsta möjliga grad. (3 p)

Lösning: För att interpolera i tre punkter behöver vi polynom av grad 2. För det första polynomet är det fördelaktig att utnyttja basen $\{1, x, x(x-1)\}$ för P_2. Vi får då ett nedåt triangulärt ekvationssystem för koordinaterna:

$$\begin{aligned} g_1(x) =& \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x(x-1) \\ g_1(0) =& \alpha_0 = 0.00 \\ g_1(1) =& \alpha_0 + \alpha_1 = 0.50 \\ & \alpha_1 = 0.50 \\ g_1(2) =& \alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1.50 \\ & \alpha_2 = 0.25 \\ g_1(x) =& 0.50x + 0.25x(x-1) \end{aligned}$$

För det andra polynomet utnyttjar vi basen $1, x-2, (x-2)(x-3)$ och får

$$\begin{aligned}
g_2(x) =& \beta_0 + \beta_1(x-2) + \beta_3(x-2)(x-3) \\
g_2(2) =& \beta_0 = 1.50 \\
g_2(3) =& \beta_0 + \beta_1 = 0.75 \\
& \beta_1 = -0.75 \\
g_2(4) =& \beta_0 + 2\beta_1 + 2\beta_2 = 0.00 \\
& \beta_2 = 0.00
\end{aligned}$$

$$g_2(x) = 1.50 - 0.75(x-2)$$

Polynomen du beräknade i a) utgör ett styckvis polynom $g(x)$ som interpolerar f.

(b) Är g en spline? Varför/varför inte? (1 p)
Lösning: För att g ska vara en spline, krävs att $g'(x)$ ska vara kontinuerlig i $x=2$, men vi har $g_1'(2) = 1.75 \neq -g_2'(2) = -0.75$, så g är inte ne spline.

(c) Beräkna en approximation till $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$ genom att använda Simpsons formel på två delintervall. (2 p) Uppgiven: Simpsons regel på ett intervall med trunkeringsfel:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)) - \frac{f^{(4)(\xi)}}{2880}(b-a)^5$$

Lösning: Approximationen blir

$$\frac{1}{3}(f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4)) = \frac{8.00}{3} \approx 2.67$$

(d) Förklara varför approximationen du beräknade i c) är lika med $\int_0^4 g(x)\mathrm{d}x$. (2 p)
Lösning: Simpsons regel interpolerar kvadratiska (och även kubiska) polynom exakt.

7. **(4 p)**

En dämpad harmonisk oscillators rörelse $x(t)$ uppfyller differentialekvationen

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

(a) Skriv differentialekvationen som en förste ordens differentialekvation

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

där $\mathbf{y}$ och $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ kan vara vektorer. (2 p)

Lösning:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}v \end{bmatrix}$$

(b) Sätt $\frac{k}{m} = 1$, $\frac{c}{m} = 2$ och lös differentialekvationen i (a) numerisk med två steg framåt Euler. Använd begynnelsesvärdena

$$\begin{cases} x(0) & = 2, \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) & = -1. \end{cases}$$

och steglängd $h = \frac{1}{2}$. (2 p)

Lösning:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} v_0 \\ -x_0 - 2v_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} v_1 \\ -x_1 - 2v_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ -0.75 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

8. **(6 p)**

Vi betraktar ett optimeringsproblem

$$\min_{[x,y]^\top \in \mathbb{R}^2} x^2 - 2x + 2xy + 2y^2.$$

(a) Beräkna steepest descent-riktningen i $\mathbf{x}_0 = [0,0]^\top$. (1 p)

Lösning:

$$\mathbf{s}_0 = -\nabla f(\mathbf{x}_0)^\top = [2,0]^\top$$

(b) En annan sökrikting dannar en vinkel α med steepest descent-riktningen. För vilka α är sökriktningen en descentriktning? (2 p)

För att en sökriktning $\mathbf{v}$ ska vara sökrikting, måste vi ha att

$$\nabla f \mathbf{v} = -\mathbf{s_0}^\top \mathbf{v} = -\|\mathbf{s}_0\|\|\mathbf{v}\| \cos(\alpha) \leq 0$$

Som är uppfylld när $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, eller $\alpha \leq 180°$.

(c) Anta att du använder steepest descent-sökriktning, och att du löser linjesökningsproblemet exakt. Vad är vinkeln mellan två på varandra följande sökriktningar? (3 p)

Lösning: Om vi i steg k löser linjesökningsproblemet

$$\min_t f(\mathbf{x}_k + t\mathbf{s}_k)$$

exakt, är $\mathbf{x}_{k+1} = x\mathbf{x}_k + t^*\mathbf{s}_k$, där t^* löser

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\mathbf{x_k} + t\mathbf{s}_k) = \nabla f(\mathbf{x_k} + t\mathbf{s}_k)\mathbf{s}_k = 0$$

Den nya sökriktningen är $\mathbf{s}_{k+1} = -\nabla f(\mathbf{x}_{k+1})^\top$ som därmed står vinkelrätt på $\mathbf{s}_k$.