MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Geir Bogfjellmo Tel: 0725-796742

TMA671 2016
2016–05–30 kl 14:00-18:00
Hjälpmedel: Inga

TMA671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Tentamen

Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.

Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5. Upp till 10 bonuspoäng från bonusuppgifter får tillgodoräknas.

Lycka till!

Geir

1. **(8 p)**

Följande rad av matriser beskriver en delvis Gauss-elimination av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(Notationen $R_2 - 3R_1$ innebär att 3 gånger rad 1 dras från rad 2.)

(a) Slutför Gausseliminationen utan pivotering. (1 p)

(b) Använd Gausseliminationen till att bestämma en LU-faktorisering av A. (2 p)

(c) Lös ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

utan att Gausseliminera på nytt. (3 p)

(d) Vad är fördelen med att beräkna och lagra LU-faktoriseringen till en matris? (2 p)

2. **(8 p)**

(a) Förklara vad som menas med ett underrum av ett linjärt rum W. (1 p).

(b) Låt $F\colon U \to W$ vara en linjär avbildning från det linjära rummet U till det linjära rummet W. Visa att värderummet till F,

$$V(F) = \{w \in W \text{ s. a. } w = F(u) \text{ för något } u \text{ i } U\},$$

är ett underrum av W. (2 p)

(c) Rangen till en matris A kan definieras på flera ekvivalenta sätt. Skriv ner ett sätt. (1 p)

(d) Anta att $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ har rang r, och att $B \in \mathbb{R}^{k\times m}$ har rang s. Vad kan du säga om rangen till $C = AB$? (4 p)

3. **(6 p)**

(a) Låt V vara ett reellt linjärt rum med skalärprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Vad krävs för att en bas $\{e_1, \ldots, e_n\}$ för V ska vara en ON-bas? (1 p)

(b) Vi betraktar det linjära rummet P_2, dvs. rummet av polynom av grad 2 eller mindre, och skalärproduktet

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\mathrm{d}t,$$

(Märk integralgränserna.) Bestäm en ortogonalbas för P_2 genom att utföra Gram–Schmidts algoritm på standardbasen $\{1, t, t^2\}$. (3 p)

(c) Beskriv hur du kan utnyttja ortogonalbasen beräknat i (b) för att bestämma $p \in P_2$ så att

$$\int_{-1}^{1} (p(t) - \sin(\pi t))^2 \mathrm{d}t \le \int_{-1}^{1} (q(t) - \sin(\pi t))^2 \mathrm{d}t \text{ för alla } q \in P_2.$$

(Du behöver inte beräkna p). (2 p)

4. Här kommer 5 par av påstående, i par (P1) och (P2). Uppgiften består i följande: Anta att påstående (P1) är sant och avgör om påstående (P2) *måste vara sant*, *kan vara sant* eller *inte kan vara sant*. Ange motivering till dina svar. **(10 p)**

(a) **(P1)** För en matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, gäller att $(A^2 + 2A - 3I) = 0$.
(P2) 3 är ett egenvärde till A. (2 p)

(b) **(P1)** V är ett ändligdimensionellt, reellt linjärt rum med skalärprodukt $\langle \cdot, \cdot, \rangle$ och $F\colon V \to V$ är en linjär transformation. I en bas $\mathbf{e}$ för V är matrisen till F symmetrisk.
(P2) $\langle F(u), v\rangle = \langle u, F(v)\rangle$ för alla vektorer $u, v \in V$. (2 p)

(c) **(P1)** Matrisen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är symmetrisk.
(P2) Det finns en ortonormerad (i standardskalärproduktet) bas för $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer till A. (2 p)

(d) **(P1)** De symmetriska matriserna A, B och C i $\mathbb{R}^{n\times n}$ är så att $AB = BA$ och $AC = CA$.
(P2) $BC = CB$. (2 p)

(e) **(P1)** Matrisen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är symmetrisk, och u och v är två linjärt oberoende egenvektorer till A.
(P2) u och v är ortogonala. (2 p)

5. I den här uppgiften betraktar vi numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 2\cos(x) - e^x = 0$. **(10 p)**

(a) Vis att ekvationen har exakt en enkelrot x^* på intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$. Du kan använda det numeriska värdet $e^{\frac{\pi}{2}} \approx 4.8105$. (2 p)

(b) Skriv upp formeln för Newtons metod för ekvationen $f(x) = 0$, och utför ett steg från initialvärdet $x_0 = 0$. (2 p)

(c) Det gäller att $|f'(x)| \geq 1$ för alla x i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ange ett interval x^* måste vara i, baserad på det numeriska värdet $f(0.5) \approx 0.1064$. (2 p)

(d) Ange ett stoppkriterium vi kan använda i Newtons metod för att vara säkra på at felen $|x_k - x^*| < \mathrm{Tol}$ för en given felgräns $\mathrm{Tol} > 0$. (2 p)

(e) Newtons metod tillämpad på ekvationen implementeras i ett flyttalsystem med maskintal $\mu = 2^{-53} \approx 1.1102 \cdot 10^{-16}$. Beskriva ett problem som kan uppstå om vi sätter $\mathrm{Tol} = 10^{-16}$. (2 p)

6. Vi ska beräkna en approximation för $I = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, där $f(x) = e^{-x^2}$, med trapetsformeln. **(8 p)**
Trapetsregeln på ett intervall med fel är:

$$\frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3, \qquad \text{för något } \xi \in (a, b).$$

Trapetsformeln är:

$$T(h) = h\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right],$$

där $x_i = a + ih$ och $h = (b-a)/n$.

(a) Visa att $|f''(\xi)| \leq 2$ på det aktuella intervallet. (2 p)

(b) Härled felgränsen

$$|T(h) - I| \leq \frac{1}{3}h^2$$

för trapetsmetoden användt på det aktuella integralet. (3 p)

(c) Beräkna en approximation för I baserad på funktionsvärderna i $-1, 0$ och 1, och ge en uppskattning av felet för approximationen. (2 p)

(d) Hur många delintervall n behövs för att felgränsen i (b) skal bli mindre än eller lika $\frac{1}{3}10^{-8}$? (1 p)

7. En matematisk pendels rörelse uppfyller differentialekvationen **(4 p)**

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\sin(\theta(t)),$$

där $\theta(t)$ är vinkeln mellan pendeln och nedåt vertikalriktning.

(a) Skriv differentialekvationen som en förste ordens differentialekvation

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}(\mathbf{t})}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t))$$

där $\mathbf{y}$ och $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ kan vara vektorer. (2 p)

(b) Lös differentialekvationen i (a) numerisk med två steg framåt Euler. Använd begynnelsesvärdena

$$\begin{cases} \theta(0) & = \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(0) & = 0. \end{cases}$$

och steglängd $h = \frac{1}{10}$. (2 p)
Om du inte har löst (a), lös i stället följande begynnelsesvärdeproblem:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1(t)}{\mathrm{d}t} = y_2(t), \\ \frac{\mathrm{d}y_2(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{\pi}y_1(t), \\ y_1(0) = \frac{\pi}{2}, \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$$

8. Vi betraktar ett optimeringsproblem **(6 p)**

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + xy + y - x.$$

(a) Vis att $s_0 = (-1, 1)^\top$ är en descentriktning i $x_0 = (0, 0)$. (1 p)

(b) Bestäm x_1 genom att exakt lösa linjesökningsproblemet med startpunkt x_0 och sökriktning s_0. (3 p)

(c) Vad händer om du löser optimeringsproblemet med Newtons metod för flerdimensionell optimering? (2 p)