MATEMATISKA VETENSKAPER | **TMA671 2016**
Chalmers tekniska högskola | **2016–05–30 kl 14:00-18:00**
Examinator: Geir Bogfjellmo Tel: 0725-796742 | **Hjälpmedel: Inga**

TMA671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Lösning

1. **(8 p)**

Följande rad av matriser beskriver en delvis Gauss-elimination av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(Notationen $R_2 - 3R_1$ innebär att 3 gånger rad 1 dras från rad 2.)

(a) Slutför Gausseliminationen utan pivotering. (1 p)

Lösning: Ser vi må dra 3 gånger rad 2 från rad 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

(b) Använd Gausseliminationen till att bestämma en LU-faktorisering av A. (2 p)

Lösning: $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ är den radreduserade matrisen vi har beräknat, och L har ettor på diagonalen, och koefficienterna från Gausseliminationen under diagonalen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Lös ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

utan att Gausseliminera på nytt. (3 p)

Lösning: Lösar $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ i två operationer $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ och $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 1$$
$$y_2 = 3 - 3y_1 = 0$$
$$y_3 = 9 - 4y_1 - 3y_2 = 5$$

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 5/(-5) = -1$$
$$x_2 = (0 - 1x_3)/(-1) = -1$$
$$x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 3$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(d) Vad är fördelen med att beräkna och lagra LU-faktoriseringen till en matris? (2 p)

Lösning: Man kan då lösa ekvationssystem $A\mathbf{x} = b$ ved bakåt/framåtsubstitution, som går snabbare än att Gausseliminera på nytt. Det här är specielt en fördel om man ska lösa flera system med samma matris A.

2. **(8 p)**

(a) Förklara vad som menas med ett underrum av ett linjärt rum W. (1 p).

Lösning: Ett underrum av ett linjärt rum är en undermängd av W som själv är ett linjärt rum. Man kan också säga att ett underrum är en icke-tom undermängd av W som är sluten under addition och multiplikation med skalär.

(b) Låt $F\colon U \to W$ vara en linjär avbildning från det linjära rummet U till det linjära rummet W. Visa att värderummet till F,

$$V(F) = \{w \in W \text{ s. a. } w = F(u) \text{ för något } u \text{ i } U\},$$

är ett underrum av W. (2 p)

Lösning: Behöver visa att $V(F)$ är icke-tom, och dessutom sluten under addition av två vektorer, och under multiplikation med skalär. $V(F)$ är icke-tom, då $0 = F(0)$ är i $V(F)$ Låt $w_1 = F(u_1)$ och $w_2 = F(u_2)$ vara vektorer i $V(F)$, och låt α vara en skalär. Då är

$$\alpha w_1 + w_2 = \alpha F(u_1) + F(u_2) = F(\alpha u_1 + u_2) \in V(F)$$

.

(c) Rangen till en matris A kan definieras på flera ekvivalenta sätt. Skriv ner ett sätt. (1 p)

Lösning:

$$\text{Rank}\, A = \text{Dim}(V(A))$$

(d) Anta att $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ har rang r, och att $B \in \mathbb{R}^{k\times m}$ har rang s. Vad kan du säga om rangen till $C = AB$? (4 p)

Lösning: For det första är $C\mathbf{x} = AB\mathbf{x} = A(B\mathbf{x})$, så alla vektorer i $V(C)$ är även i $V(A)$. Då båda $V(C)$ och $V(A)$ är linjära rum, måste $V(C)$ vara underrum av $V(A)$ och

$$\text{Rank}\, C = \text{Dim}\, V(C) \leq \text{Dim}\, V(A) = r.$$

For det andra gäller $B\mathbf{x} = 0 \Rightarrow C\mathbf{x} = AB\mathbf{x} = 0$, så $N(B)$ är underrum av $N(C)$. Från dimensionssatsen (två gånger) kan vi då sluta

$$\text{Rank}\, C = m - \dim N(C) \leq m - \dim N(B) = \text{Rank}\, B = s.$$

Vi kan finna olikheter till andra hållet också. Givetvis gäller

$$\operatorname{Rank} C \geq 0,$$

men vi har också en annan olikhet: Låt $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m-s}$ vara en bas för $N(B)$ som vi utvidgar till bas för $V(C)$ vid att lägga till vektorerna $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_q$, där

$$m - s + q = \dim N(C) = m - \operatorname{Rank} C \Leftrightarrow \operatorname{Rank} C = s - q$$

Då är $B\mathbf{w}_1, \ldots, B\mathbf{w}_q$ linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^k$. (Om de inte var linjärt oberoende, ville vi hatt att en linjärkombination av dom var lika noll, som implicerar att en linjärkombination av $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_q$ är i $N(B)$). Men vi har även att $AB\mathbf{w}_1 = 0, \ldots, AB\mathbf{w}_q = 0$, så $B\mathbf{w}_1, \ldots, B\mathbf{w}_q$ är linjärt oberoende vektorer i $N(A)$. Det innebär att $q \leq \dim N(A) = k - r$ och

$$\operatorname{Rank} C = s - q \geq s + r - k.$$

3. **(6 p)**

(a) Låt V vara ett reellt linjärt rum med skalärprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Vad krävs för att en bas $\{e_1, \ldots, e_n\}$ för V ska vara en ON-bas? (1 p)

Lösning: En bas är ON-bas om

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, \text{om } i \neq j, \\ 1, \text{om } i = j. \end{cases}$$

(b) Vi betraktar det linjära rummet P_2, dvs. rummet av polynom av grad 2 eller mindre, och skalärproduktet

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\mathrm{d}t,$$

(Märk integralgränserna.) Bestäm en ortogonalbas för P_2 genom att utföra Gram–Schmidts algoritm på standardbasen $\{1, t, t^2\}$. (3 p)

Lösning: Sätter $p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = t^2$, och utför Gram–Schmidt:

$$\begin{aligned} q_0 &= p_0 \\ q_1 &= p_1 - \frac{\langle p_1, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0 = p_1 - \frac{0}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0 \qquad \text{(integral av udda funktion)} \\ &= p_1 \\ q_2 &= p_2 - \frac{\langle p_2, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0 - \frac{\langle p_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1 \end{aligned}$$

$\frac{\langle p_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} = \frac{0}{\langle q_1, q_1 \rangle}$, (integral av udda funktion), men för den andra termen måste vi beräkna:

$$\langle p_2, q_0 \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 \mathrm{d}t = \frac{2}{3},$$

$$\langle q_0, q_0 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \mathrm{d}t = 2.$$

Och vi ser att

$$q_2(t) = p_2(t) - \frac{1}{3} q_0(t) = t^2 - \frac{1}{3}.$$

(c) Beskriv hur du kan utnyttja ortogonalbasen beräknat i (b) för att bestämma $p \in P_2$ så att

$$\int_{-1}^{1} (p(t) - \sin(\pi t))^2 \mathrm{d}t \leq \int_{-1}^{1} (q(t) - \sin(\pi t))^2 \mathrm{d}t \text{ för alla } q \in P_2.$$

(Du behöver inte beräkna p). (2 p)

Lösning: Optimeringsproblemet lösas av den ortogonale projektionen av $f(t) = \sin(\pi t) \in C[-1,1]$ på P_2. Då vi har en ortogonalbas $\{q_0, q_1, q_2\}$ för P_2, är den ortogonala projektionen given av

$$p = \frac{\langle f, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0 + \frac{\langle f, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1 + \frac{\langle f, q_2 \rangle}{\langle q_2, q_2 \rangle} q_2$$

4. Här kommer 5 par av påstående, i par (P1) och (P2). Uppgiften består i följande: Anta att påstående (P1) är sant och avgör om påstående (P2) *måste vara sant*, *kan vara sant* eller *inte kan vara sant*. Ange motivering till dina svar. **(10 p)**

(a) **(P1)** För en matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, gäller att $(A^2 + 2A - 3I) = 0$.
(P2) 3 är ett egenvärde till A. (2 p)

Lösning: **(P2)** *kan inte vara sant.* Om $\mathbf{v}$ är slik att $A\mathbf{v} = 3v$, har vi

$$0 = (A^2 + 2A - 3I)\mathbf{v} = A^2\mathbf{v} + 2A\mathbf{v} - 3\mathbf{v} = 3^2\mathbf{v} + 2 \cdot 3\mathbf{v} - 3\mathbf{c} = 12\mathbf{v}$$

det vill säga $\mathbf{v} = 0$.

(b) **(P1)** V är ett ändligdimensionellt, reellt linjärt rum med skalärprodukt $\langle \cdot, \cdot, \rangle$ och $F\colon V \to V$ är en linjär transformation. I en bas $\mathbf{e}$ för V är matrisen till F symmetrisk.
(P2) $\langle F(u), v \rangle = \langle u, F(v) \rangle$ för alla vektorer $u, v \in V$. (2 p)

Lösning: **(P2)** *kan vara sant.* Om basen $\mathbf{e}$ är ortonormerad, gäller det, men inte annars.

(c) **(P1)** Matrisen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är symmetrisk.
(P2) Det finns en ortonormerad (i standardskalärproduktet) bas för $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer till A. (2 p)

Lösning: **(P2)** *måsta vara sant.* Det här är spektralsatsen.

(d) **(P1)** De symmetriska matriserna A, B och C i $\mathbb{R}^{n \times n}$ är så att $AB = BA$ och $AC = CA$.
(P2) $BC = CB$. (2 p)

Lösning: **(P2)** *kan vara sant* då det jo är möjligt att matriser kommuterar, men kan också inta vara sant, (t.ex. om A är identitetsmatrisen, och B och C är icke-kommuterande matriser.)

(e) **(P1)** Matrisen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är symmetrisk, och u och v är två linjärt oberoende egenvektorer till A.
(P2) u och v är ortogonala. (2 p)

Lösning: **(P2)** *kan vara sant.* Om u och v är egenvektorer tillhörande olika egenvärder, måste de vara ortogonala, men om de tillhör samma egenvärde, kan man inte garantera det.

5. I den här uppgiften betraktar vi numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 2\cos(x) - e^x = 0$. **(10 p)**

(a) Visa att ekvationen har exakt en enkelrot x^* på intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$. Du kan använda det numeriska värdet $e^{\frac{\pi}{2}} \approx 4.8105$. (2 p)

Lösning: f är kontinuerlig, och vi har $f(0) = 1 > 0$, $\quad f(\frac{\pi}{2}) = -e^{\frac{\pi}{2}} < 0$. Så f har minst en rot på intervallet. I tillägg är $f'(x) = -2\sin(x) - e^x < 0$ ($\sin(x)$ är positiv på intervallet), så f kan inte ha fler rötter, och roten x^* är enkelrot, då $f'(x^*) \neq 0$.

(b) Skriv upp formeln för Newtons metod för ekvationen $f(x) = 0$, och utför ett steg från initialvärdet $x_0 = 0$. (2 p)

Lösning:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{2\cos(x_k) - e^{x_k}}{-2\sin(x_k) - e^{x_k}}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{1}{-1} = 1$$

(c) Det gäller att $|f'(x)| \geq 1$ för alla x i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ange ett interval x^* måste vara i, baserad på det numeriska värdet $f(0.5) \approx 0.1064$. (2 p)

Lösning: Vi har

$$f(0.5) = f(0.5) - f(x^*) = f'(\xi)(0.5 - x^*)$$

där ξ ligger mellan 0.5 och x^*, som innebär $|f'(\xi)| \geq 1$. Det ger igen

$$|0.5 - x^*| = \left|\frac{1}{f'(\xi)} f(0.5)\right| \leq 1|f(0.5)| \approx 0.1064$$

Eller $x^* \in (0.3935, 0.6065)$.

Använder vi också att $f'(\xi) < 0$, som vi har från (a), kan vi minska intervallet till $x^* \in (0.5, 0.6065)$.

(d) Ange ett stoppkriterium vi kan använda i Newtons metod för att vara säkra på at felen $|x_k - x^*| < \text{Tol}$ för en given felgräns $\text{Tol} > 0$. (2 p)

Lösning: På motsvarande sätt som i (c) får vi

$$|x_k - x^*| = \left|\frac{1}{f'(\xi)} f(x_k)\right| \leq |f(x_k)|$$

Så om vi ska säkra att $|x_k - x^*| \leq \text{Tol}$, kan vi använda stoppkriteriet $|f(x_k)| \leq \text{Tol}$.

(e) Newtons metod tillämpad på ekvationen implementeras i ett flyttalsystem med maskintal $\mu = 2^{-53} \approx 1.1102 \cdot 10^{-16}$. Beskriva ett problem som kan uppstå om vi sätter $\text{Tol} = 10^{-16}$. (2 p)

Lösning: Det är möjligt, även sannolikt, att Newtons metod inte vill konvergera. Det är inte därför att det inte fins något flyttal $\hat{x}$ så att $|\hat{x} - x^*| \leq 10^{-16}$, det gör det, då $x^*\mu < 0.61\mu < 10^(- 16)$. Men iterationen i Newtons metod vill inte beräknas med tillräcklig noggrannhet.

6. Vi ska beräkna en approximation för $I = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, där $f(x) = e^{-x^2}$, med trapetsformeln. **(8 p)**

Trapetsregeln på ett intervall med fel är:

$$\frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3, \qquad \text{för något } \xi \in (a, b).$$

Trapetsformeln är:

$$T(h) = h\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right],$$

där $x_i = a + ih$ och $h = (b-a)/n$.

(a) Visa att $|f''(\xi)| \leq 2$ på det aktuella intervallet. (2 p)

Lösning:

$$|f''(\xi)| = |(4x^2 - 2)e^{-x^2} \leq |4x^2 - 2|$$

och det gäller att $-2 \leq 4x^2 - 2 \leq 2$ på intervallet $[-1, 1]$.

(b) Härled felgränsen

$$|T(h) - I| \leq \frac{1}{3}h^2$$

för trapetsmetoden användt på det aktuella integralet. (3 p)

Lösning: Vi beräknar en approximation för $I = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ vid trapetsformeln. Sätter då $x_0 = -1, \ldots, x_i = -1 + ih, \ldots, x_n = 1$, där $h = \frac{2}{n}$. Vi har

$$\begin{aligned}
T(h) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x + \frac{f''(\xi_i)}{12}(x_{i+1} - x_i)^3 \qquad \text{där } \xi_i \in (x_i, x_{i+1}) \\
&= \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f''(\xi_i)}{12} h^3
\end{aligned}$$

Därför är

$$\begin{aligned}
\left| T(h) - \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f''(\xi_i)}{12} h^3 \right| \\
&\le \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{f''(\xi_i)}{12} h^3 \right| \\
&\le \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{12} h^3 = nh\frac{1}{6}h^2 = 2\frac{1}{6}h^2 = \frac{1}{3}h^2
\end{aligned}$$

(c) Beräkna en approximation för I baserad på funktionsvärderna i $-1, 0$ och 1, och ge en uppskattning av felet för approximationen. (2 p)
Lösning:

$$T(1) = \frac{1}{2}(f(-1) + 2f(0) + f(1)) = \frac{1}{2}(e^{-1} + 2 \cdot 1 + e^{-1}) = 1 + e^{-1}$$

och vi vet att $|T(1) - I| \le \frac{1}{3}$.

(d) Hur många delintervall n behövs för att felgränsen i (b) skal bli mindre än eller lika $\frac{1}{3}10^{-8}$? (1 p)
Lösning: $\frac{1}{3}h^2 \le \frac{1}{3}10^{-8}$ ger $h \le 10^{-4}$, det vil säga $n = \frac{2}{h} \ge 20000$.

7. En matematisk pendels rörelse uppfyller differentialekvationen **(4 p)**

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\sin(\theta(t)),$$

där $\theta(t)$ är vinkeln mellan pendeln och nedåt vertikalriktning.

(a) Skriv differentialekvationen som en förste ordens differentialekvation

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}(\mathbf{t})}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t))$$

där $\mathbf{y}$ och $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ kan vara vektorer. (2 p)
Lösning: Sätter $y_1(t) = \theta(t), y_2(t) = \theta'(t)$, har vi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ -\sin(y_1(t)) \end{bmatrix}$$

(b) Lös differentialekvationen i (a) numerisk med två steg framåt Euler. Använd begynnelsesvärdena

$$\begin{cases} \theta(0) &= \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(0) &= 0. \end{cases}$$

och steglängd $h = \frac{1}{10}$. (2 p)

Lösning: Vi har

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_0 &= \begin{bmatrix} \theta(0) \\ \theta'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{y}_1 &= \mathbf{y}_0 + hf(\mathbf{y}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{10} \end{bmatrix} \\
\mathbf{y}_2 &= \mathbf{y}_1 + hf(\mathbf{y}_1) = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{10} \end{bmatrix} + \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{100} \\ -\frac{2}{10} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

8. Vi betraktar ett optimeringsproblem **(6 p)**

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + xy + y - x.$$

(a) Vis att $s_0 = (1, -1)^\top$ är en descentriktning i $x_0 = (0, 0)^\top$. (1 p)

Lösning:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} f(x_0 + \alpha s_0)\Big|_{\alpha=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \left(\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{3}{2}\alpha^2 - \alpha^2 - 2\alpha \right) \Big|_{\alpha=0} = -2 < 0$$

Riktningsderivaten är negativ i den riktningen, så det är en descentriktning.

(b) Bestäm x_1 genom att exakt lösa linjesökningsproblemet med startpunkt x_0 och sökriktning s_0. (3 p)

Lösning:

$$f(x_0 + \alpha s_0) = \alpha^2 - 2\alpha$$

uppnår sitt minimala värde i $\alpha = 1$.

Då är $x_0 + \alpha s_0 = s_0 = (1, -1)^\top$.

(c) Vad händer om du löser optimeringsproblemet med Newtons metod för flerdimensionell optimering? (2 p)

Lösning: Det här är ett optimeringsproblem med kvadratisk objektfunktion. Sådana löser Newton's metod exakt i ett steg.