MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Geir Bogfjellmo Tel: 0725-796742

TMA671 2016
2016–10–08 kl 08:30-12:30
Hjälpmedel: Inga

TMA671 Linjär Algebra och Numerisk Analys

Tentamen

Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Tentan består av 8 uppgifter, med varierande antal deluppgifter.

Maximalt antal poäng är 60, och betygsgränserna är 30 för 3 (godkänd), 42 för 4 och 54 för 5. Upp till 10 bonuspoäng från bonusuppgifter får tillgodoräknas.

Lycka till!

Geir

1. **(8 p)**

Följande rad av matriser beskriver en delvis Gauss-elimination av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(Notationen $R_2 - 2R_1$ innebär att 3 gånger rad 1 dras från rad 2.)

(a) Slutför Gausseliminationen utan pivotering. (1 p)

(b) Använd Gausseliminationen till att bestämma en LU-faktorisering av A. (2 p)

(c) Lös ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

utan att Gausseliminera på nytt. (3 p)

(d) Beskriva hur du kan använda den kompakta QR-faktorisering av en $m \times n$ matris B, där $m \geq n$, för att lösa minstakvadratproblemet (2 p)

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|B\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2.$$

2. **(8 p)**

(a) Förklara vad som menas med att en uppställning vektorer $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ i et linjärt rum U är linjärt oberoende. (2 p)

(b) Låt $T\colon U \to W$ vara en linjär transformation, och anta att $\{T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$ är linjärt oberoende vektorer i W. Visa att även $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ är linjärt oberoende. (3 p)

(c) Låt T vara som i (b), och anta att $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ är linjärt oberoende vektorer i U. Kan du med säkerhet säga att $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ är linjärt oberoende? Varför/varför inte? (3 p)

3. **(8 p)**

I den här uppgiften betraktar vi $C[0,1]$, det vill säga rummet av reella kontinuerliga funktioner på $[0,1]$, med skalärprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Ortogonalprojektionen av en funktion f på et underrum U är en funktion Pf så att $f - Pf$ är i Us ortogonala komplement.

(a) Visa att $\langle Pf, g\rangle = \langle f, g\rangle$ för alla $g \in U$. (2 p)

Anta att U är ändligdimensionell, och låt $\{g_1, \ldots, g_n\}$ vara en bas för U. Då kan $Pf \in U$ skrivas $Pf(x) = y_1 g_1(x) + \cdots + y_n g_n(x)$.

(b) Härled följande linjära ekvationssystem för koefficienterna $y_1, \ldots, y_n$. (2 p)

$$\sum_{j=1}^{n} \langle g_i, g_j\rangle y_j = \langle f, g_i\rangle$$

(c) Visa att ekvationssystemet alltid har en lösning. (4 p)

(d) Beräkna ortogonalprojektionen av funktionen $f(x) = \sin(\pi x)$ på underrummet av första grads polynom, $P_1 = \{\alpha_1 x + \alpha_0 \text{ där } \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}\} \subset C[0,1]$ (2 p)
Det uppges att

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$$
$$\int_0^1 x\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}$$

4. **(10 p)**

Här kommer 5 par av påstående, i par (P1) och (P2). Uppgiften består i följande: Anta att påstående (P1) är sant och avgör om påstående (P2) *måste vara sant*, *kan vara sant* eller *inte kan vara sant*. Ange motivering till dina svar.

(a) **(P1)** För en matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, gäller det att $(A - 3I)(A - I) = 0$.
(P2) 1 eller 3, eller båda, är egenvärde(n) till A . (2 p)

(b) **(P1)** Matrisen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är diagonaliserbar.
(P2) A har en invers. (2 p)

(c) **(P1)** Vektorerna $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_{n+1}\}$ i $\mathbb{R}^n$ är alla egenvektorer till samma matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
(P2) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}\}$ tillhör olika egenvärder. (2 p)

(d) **(P1)** Matrisen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är symmetrisk.
(P2) A kan skrivas på formen (2 p)

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^\top.$$

(e) **(P1)** $A = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.
(P2) A har två egenvärden: 1 och -1. (2 p)

5. **(8 p)**

I den här uppgiften betraktar vi numerisk lösning av det endimensionella optimeringsproblemet

$$\min_x f(x)$$

där $f(x) = x^2 + e^x$

(a) Visa att funktionen har exakt ett lokalt minimum x^*, och at det fins i intervallet $[-1, 0]$. (2 p)

(b) Skriv upp iterationsformeln för Newtons metod tillämpad på optimeringsproblemet, och utför ett steg från startvärdet $x_0 = 0$. (2 p)

(c) Bestäm en uppskattning av felet för x_1 du beräknade i (b), baserad på det numeriska värdet $e^{x_1} \approx 0.7165$ och $f''(x) > 2$ för alla x. (2 p)

(d) I et flyttalssystem med avrundingsenhet μ konvergerar Newtons metod till ett representerbart tal x_n så att $f'(x_n)$ beräknat i flyttal blir exakt lika 0. Bestäm en uppskattning av skillnaden $|x_n - x^*|$. (2 p)

6. Vi betraktar en funktion **(8 p)**

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2, & x < 0 \\ x - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Estimera $f'(0)$ vid att använda centraldifferens och steglängd $h = 0.1$ och $h = 0.01$. (1 p)

(b) Beräkna en formel för approximationen du får för $f'(0)$ när du använder centraldifferens och godtycklig steglängd $h > 0$. (2 p)

(c) Jämställ med det exakta värdet $f'(0) = 1$. Vad är trunkeringsfelet för centraldifferensen i det här fallet? (2 p)

(d) I boken står det att centraldifferens för $f'(x)$ har trunkeringsfel på formen $b_1 h^2 + b_2 h^4 + \cdots$. Varför gäller det inte i det här fallet? (3 p)

7. I den här uppgiften studerar vi kvadraturformler för integration **(4 p)**

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + R_T$$

(a) Låt kvadraturpunkterna x_i vara givna. Vi önskar att bestämma vikter w_i så att kvadraturformeln $\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$. är exakt för polynomer upp till ordning $n-1$. Härled ett system av linjära ekvationer för vikterna w_i. (3 p)

(b) Matrisen för systemet av ekvationer du beräknade i (a) är oftast illa konditionerad. Förklara vilken konsekvens det har för numerisk beräknade vikter w_i. (1 p)

8. **(6 p)**

Vi betraktar ett system av ekvationer i flera variabler

$$f(\mathbf{x})\begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1 x_2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Beräkna Jacobianen till f. (2 p)

(b) Sätt $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{0}$, och utför ett steg med Newtons metod för system av ekvationer. (3 p)

(c) För vilka startvärder är Newtons metod inte definierad? (1 p)